



**Ana Cristina da Silva  
Valente**

**O estudo antecipado mediado por tecnologias: a  
aprendizagem de generalidades sobre funções e o  
desenvolvimento da autonomia**





**Ana Cristina da Silva  
Valente**

**O estudo antecipado mediado por tecnologias: a  
aprendizagem de generalidades sobre funções e o  
desenvolvimento da autonomia**

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º CEB e no secundário, realizado sob a orientação científica da Doutora Isabel Cabrita, Professor Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro



## **o júri**

presidente

**Prof. Doutora Maria Teresa Bixirão Neto**

professor auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade do Aveiro

**Prof. Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu**

professor auxiliar do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho

**Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira**

professor auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro



## **agradecimentos**

À professora Doutora Isabel Cabrita pelas aprendizagens proporcionadas, orientação, disponibilidade, apoio e compreensão. Os incentivos e a confiança que depositou em mim foram fundamentais durante este processo.

À professora Isabel Órfão pela disponibilidade, apoio e compreensão. Sem a sua cooperação tudo teria sido muito mais difícil. Muito obrigada também pelas aprendizagens proporcionadas.

Aos alunos envolvidos, sem os quais este trabalho não teria sido possível.

Às minhas colegas de estágio, à Marilyn e à Micaela por terem contribuído de forma significativa na construção deste trabalho.

À minha família.





## palavras-chave

Aprendizagem antecipatória, construção de conhecimento, autonomia.

## resumo

As causas do insucesso escolar na matemática vão muito além das capacidades intelectuais dos alunos, envolvendo também a forma como se perspetiva a construção de conhecimento, a finalidade que se atribui à aprendizagem e as práticas letivas adotadas. O professor tem de começar a envolver mais os alunos no próprio processo de aprendizagem, mesmo antes de uma abordagem formal dos tópicos, e contribuir, assim, para o desenvolvimento de outras competências, como é o caso da autonomia. As tecnologias, indissociáveis do mundo atual, podem desempenhar um papel importante neste processo.

Face a esta problemática, formulou-se a seguinte questão de investigação: uma exploração prévia e extra-aula, mediada por tecnologias, de tópicos matemáticos, posteriormente abordados em sala de aula, contribui para que os alunos desenvolvam competências matemáticas e transversais?

Decorrentes da questão apresentada, definiram-se os seguintes objetivos do estudo: analisar a influência da realização prévia e extra-aula, por parte de alunos do 10.º ano de escolaridade, de tarefas relacionadas com o tópico “Generalidades acerca de funções”, posteriormente lecionado em aula: (i) na construção de conhecimento relativo a esse tópico e sua aplicação na resolução de tarefas variadas e (ii) no desenvolvimento da autonomia.

Por forma a tentar responder à questão de investigação e cumprir os objetivos propostos, optou-se por um estudo de caso múltiplo de natureza qualitativa, com alunos do 10.º ano de escolaridade de uma escola do distrito de Aveiro.

Usaram-se como principais técnicas de recolha de dados a análise documental, a inquirição e a observação.

Os resultados obtidos indicam que uma exploração prévia, por parte dos alunos, de tópicos matemáticos contribui para a construção e aplicação de conhecimentos relacionados com ‘Generalidades acerca de funções’. Já no que se refere à autonomia: (a) constatou-se que é possível construir autonomamente conhecimento; (b) são poucos os alunos que procuram outra ajuda para além dos materiais disponibilizados pelo professor para ultrapassar as dificuldades com que se deparam e (c) embora os alunos tenham estado envolvidos e interessados nas aulas, nem todos os casos analisados concordam que o trabalho autónomo favorece a aprendizagem da matemática.



## Keywords

Anticipatory learning, construction of knowledge, autonomy.

## Abstract

The main causes for the underachievement in mathematics go far beyond the students' intellectual abilities, involving as well the way we envision the knowledge construction, the purpose given to the learning and the adopted teaching process.

Teachers must start involving students in the learning process itself, even before a formal topics approach, and thus contribute to the development of other skills, such as autonomy. Technologies, indivisible from the modern world, may play an important role in this process.

To deal with this issue, the following research question was formulated: a prior and extra-class approach mediated by technologies of mathematical topics, later covered in the classroom, could this help students in mathematical and transversal development?

Due to the previous question, the following objectives were defined: analyze the influence of the accomplishment of tasks related with the "Generalities on Functions" prior and extra-class, by 10th grade students, later taught in class: (i) on the construction of knowledge concerning this topic and its application in the resolution of some tasks and (ii) on the autonomy development.

In order to answer the research question and fulfill the proposed goals, it was decided for a multiple case study of qualitative nature, with 10th grade students from a school in the district of Aveiro.

The main data collection techniques were the documentary analysis, techniques of enquiry and observation.

The obtained results indicate that a prior investigation, by the students, of the mathematical topics contributes to the construction and application of knowledge relating to "Generalities on Functions". Regarding autonomy: (a) it was found that it's possible to build knowledge autonomously (b) few are the students that seek for help beyond the materials given by teachers to overcome the difficulties encountered and (c) although students have been involved and interested in lessons, not all the examined cases settle that the autonomous work benefits the mathematics learning.



*“Pedras no caminho?  
Guardo todas, um dia vou construir um castelo...”*

Fernando Pessoa



# Índice

I.	Introdução .....	1
1.	Contextualização do problema.....	1
2.	Questões e objetivos de investigação .....	2
3.	Organização do estudo .....	3
II.	Fundamentação Teórica.....	4
1.	Aprendizagem antecipatória e o desenvolvimento da autonomia.....	4
1.1	Da aprendizagem como aquisição de respostas à aprendizagem como desenvolvimento de competências .....	4
1.2	Aprendizagem antecipatória .....	8
1.3	Desenvolvimento da autonomia.....	12
2.	As TIC no processo de aprendizagem.....	14
3.	Generalidades sobre funções reais de variável real.....	17
3.1.	Evolução do conceito .....	17
3.2.	Funções nos currículos .....	18
3.3.	Dificuldades no processo de aprendizagem.....	19
III.	Método de Investigação.....	21
1.	Opções metodológicas.....	21
2.	Caraterização dos Participantes .....	23
3.	Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados.....	31
3.1.	Recolha documental .....	31
3.2.	Inquirição .....	32
3.3.	Observação.....	33
4.	Descrição do Estudo.....	33
5.	Apresentação e discussão dos resultados.....	37
IV.	Apresentação e Discussão de Resultados .....	38
1.	Jaime.....	38

1.1	Construção e aplicação de conhecimento .....	39
1.2	Autonomia .....	47
2.	Rita .....	51
2.1.	Construção e aplicação de conhecimentos .....	52
2.2.	Autonomia .....	60
3.	Leonor.....	64
3.1.	Construção e aplicação de conhecimentos .....	65
3.2.	Autonomia .....	70
4.	Teresa .....	74
4.1.	Construção e aplicação de conhecimentos .....	75
4.2.	Autonomia .....	80
V.	Considerações finais.....	85
1.	Síntese.....	85
2.	Principais conclusões .....	86
2.1.	Construção e aplicação de conhecimento .....	86
2.2.	Desenvolvimento de autonomia.....	90
3.	Constrangimentos do estudo .....	93
4.	Sugestões para futuras investigações .....	94
	Referências Bibliográficas .....	95
	Apêndices .....	101



## **Índice de Apêndices**

Apêndice 1 – Questionário Inicial .....	103
Apêndice 2 – Questionário Final .....	109
Apêndice 3 – Tarefa extra-aula 1: “A emissão de CO <sub>2</sub> ” .....	113
Apêndice 4 – Tarefa extra-aula 2: “A matemática pensa em tudo” .....	119
Apêndice 5 – Tarefa extra-aula 3: “Os mesmos dados, duas funções” .....	125
Apêndice 6 – Plano de aula do dia 15 de março de 2016 .....	131
Apêndice 7 – Plano de aula do dia 17 de março de 2016 .....	143
Apêndice 8 – Plano de aula do dia 4 de abril de 2016 .....	153
Apêndice 9 – Autorização aos Encarregados de Educação.....	163



## Índice de figuras

<b>Figura 1</b> – Frequência relativa da variável “em relação às três disciplinas de que mais gostas, a matemática está incluída?” .....	25
<b>Figura 2</b> – Frequência absoluta da variável “gosto de matemática” .....	25
<b>Figura 3</b> – Frequência absoluta da variável “gosto de matemática” .....	26
<b>Figura 4</b> – Frequência absoluta da variável “gosto de resolver tarefas matemáticas” ...	26
<b>Figura 5</b> – Frequência absoluta da variável “gosto de desafios/jogos matemáticos” ....	26
<b>Figura 6</b> – Frequência absoluta da variável “a matemática não é importante para a minha formação” .....	27
<b>Figura 7</b> – Frequência absoluta da variável “Tenho apetência para a matemática” .....	27
<b>Figura 8</b> – Frequência absoluta da variável “não sou bom aluno a matemática” .....	27
<b>Figura 9</b> – Frequência absoluta da variável “que dispositivos dispões com acesso à Internet .....	28
<b>Figura 10</b> – Frequência absoluta da variável “serviços e ferramentas <i>Web</i> que conhece e utiliza” .....	28
<b>Figura 11</b> – Frequência absoluta da variável “para que usas serviços e ferramentas <i>Web</i> ” .....	29
<b>Figura 12</b> – Resolução da questão 1 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1 .....	39
<b>Figura 13</b> – Resolução da questão 2 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1 .....	39
<b>Figura 14</b> – Resolução da questão 4.a) apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1 .	40
<b>Figura 15</b> - Resposta à questão 4.d) apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1 .....	40
<b>Figura 16</b> – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função $f$ .....	41
<b>Figura 17</b> – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função $g$ .....	42
<b>Figura 18</b> – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função $h$ .....	42

<b>Figura 19</b> – Resposta à questão 2 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2 .....	43
<b>Figura 20</b> – Resposta à questão 3 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2 .....	43
<b>Figura 21</b> – Resposta à questão 4 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2 .....	43
<b>Figura 22</b> - Resposta do Jaime à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 de março ....	44
<b>Figura 23</b> – Resposta do Jaime à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 de março....	44
<b>Figura 24</b> – Resposta do Jaime à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 de março....	45
<b>Figura 25</b> – Resposta à questão 3 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3 .....	45
<b>Figura 26</b> – Resposta à questão 4 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3 .....	45
<b>Figura 27</b> – Resposta à questão 7 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3 .....	46
<b>Figura 28</b> - Resposta à questão 8 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3 .....	46
<b>Figura 29</b> – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $f$	47
<b>Figura 30</b> – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $g$	47
<b>Figura 31</b> – Resolução da questão 2 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1 .....	52
<b>Figura 32</b> – Resolução da questão 4.a) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1 ....	53
<b>Figura 33</b> – Resolução da questão 4.b) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1 ....	53
<b>Figura 34</b> – Resolução da questão 4.c) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1 ...	53
<b>Figura 35</b> – Resolução da questão 4.d) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1 ...	54
<b>Figura 36</b> – Resposta da Rita à questão de aula do dia 15 março.....	55
<b>Figura 37</b> – Resolução da questão 2 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2 .....	55
<b>Figura 38</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2 .....	56
<b>Figura 39</b> – Resolução da questão 5 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2 .....	56
<b>Figura 40</b> – Resposta da Rita à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março .....	57
<b>Figura 41</b> - – Resposta da Rita à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março .....	57
<b>Figura 42</b> – Resposta da Rita à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março .....	57

<b>Figura 43</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3 .....	58
<b>Figura 44</b> – Resolução da questão 4 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3 .....	58
<b>Figura 45</b> – Resolução da questão 7 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3 .....	58
<b>Figura 46</b> – Resolução da questão 8 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3 .....	59
<b>Figura 47</b> – Resposta da Rita à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $f$ ...	59
<b>Figura 48</b> – Resposta da Rita à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $g$ ...	60
<b>Figura 49</b> – Resolução da questão 2 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 1 ...	65
<b>Figura 50</b> – Resolução da questão 4.a) apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 1	66
<b>Figura 51</b> – Resposta da Leonor à questão de aula do dia 15 março .....	66
<b>Figura 52</b> – Resolução da questão 2 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 2 ...	67
<b>Figura 53</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 2 ...	67
<b>Figura 54</b> – Resposta da Leonor à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março .....	68
<b>Figura 55</b> – Resposta da Leonor à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março .....	68
<b>Figura 56</b> – Resposta da Leonor à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 março .....	68
<b>Figura 57</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3 ...	69
<b>Figura 58</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3 ...	69
<b>Figura 59</b> – Resolução da questão 7 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3 ...	69
<b>Figura 60</b> – Resolução da questão 8 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3 ...	69
<b>Figura 61</b> – Resposta da Leonor à questão de aula do dia 4 de abril.....	70
<b>Figura 62</b> – Sugestão de um <i>site</i> procedida da Leonor na tarefa extra-aula 3.....	73
<b>Figura 63</b> – Resolução da questão 2 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 1 ....	75
<b>Figura 64</b> – Resposta da Teresa à questão de aula do dia 15 março.....	76
<b>Figura 65</b> – Resolução da questão 1 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2 ....	76
<b>Figura 66</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2 ....	77

<b>Figura 67</b> – Resolução da questão 4 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2 ....	77
<b>Figura 68</b> – Resposta da Teresa à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março .....	77
<b>Figura 69</b> – Resposta da Teresa à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março .....	78
<b>Figura 70</b> – Resposta da Teresa à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 março .....	78
<b>Figura 71</b> – Resolução da questão 3 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3 ....	78
<b>Figura 72</b> – Resolução da questão 4 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3 ....	78
<b>Figura 73</b> – Resolução da questão 7 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3 ....	79
<b>Figura 74</b> – Resposta da Teresa à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $f$ .....	79
<b>Figura 75</b> – Resposta do Teresa à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função $g$ .....	80

## Índice de quadros

<b>Quadro 1</b> – Comparação das atividades e respetivo tempo numa aula tradicional e numa aula <i>Flipped Classroom</i> de 90 minutos (Bergmann & Sams, 2012) .....	10
<b>Quadro 2</b> – Atividades desenvolvidas durante a sequência didática .....	36
<b>Quadro 3</b> – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (a).....	48
<b>Quadro 4</b> – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (b) .....	49
<b>Quadro 5</b> – Respostas do Jaime ao QF em relação à dimensão (b).....	49
<b>Quadro 6</b> – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (c).....	50
<b>Quadro 7</b> – Respostas do Jaime ao QF em relação à dimensão (c).....	51
<b>Quadro 8</b> – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (a) .....	61
<b>Quadro 9</b> – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (b) .....	62
<b>Quadro 10</b> – Respostas da Rita ao QF em relação à dimensão (b) .....	62
<b>Quadro 11</b> – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (c).....	63
<b>Quadro 12</b> – Respostas da Rita ao QF em relação à dimensão (c).....	64
<b>Quadro 13</b> – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (a) .....	71
<b>Quadro 14</b> – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (b).....	72
<b>Quadro 15</b> – Respostas da Leonor ao QF em relação à dimensão (b).....	72
<b>Quadro 16</b> – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (c).....	73
<b>Quadro 17</b> – Respostas da Leonor ao QF em relação à dimensão (c).....	74
<b>Quadro 18</b> – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (a).....	81
<b>Quadro 19</b> – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (b) .....	81
<b>Quadro 20</b> – Respostas da Teresa ao QF em relação à dimensão (b).....	82
<b>Quadro 21</b> – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (c).....	83
<b>Quadro 22</b> – Respostas da Teresa ao QF em relação à dimensão (c).....	83









## I. Introdução

No capítulo inicial, apresenta-se a motivação para a realização deste trabalho e a sua pertinência. Dá-se a conhecer as questões de investigação, que se mostrarão o fio condutor deste trabalho e, ainda, os objetivos delas decorrentes. Por fim, faz-se uma breve descrição da forma como se organiza o trabalho.

### 1. Contextualização do problema

A nível global, o insucesso escolar e educativo a matemática é uma realidade que muito tem preocupado a sociedade em geral (Almeida, 2006; Araújo, 2014; Pais, Cabrita, & Anjo, 2014; Viveiros & Lopes, 2008).

Em Portugal, os resultados dos exames tornados públicos através do relatório elaborado pelo júri nacional de exames em 2014 mostram que, no 3.º CEB, a média das classificações foi de 51 pontos (numa escala que varia entre 0 e 100 pontos), sendo que 47% dos alunos que realizou o exame obteve uma classificação negativa (Monteiro *et al.*, 2014). Já no ensino secundário, as disciplinas “*que apresentam as médias das classificações mais baixas são: Matemática B, com 74 pontos e matemática A, com 78 pontos*” (Monteiro *et al.*, 2014, p. 64). No mesmo documento, verifica-se que os valores negativos na média de classificação dos exames nacionais do ensino secundário de Matemática A têm sido uma realidade nos últimos anos.

Saraiva, Teixeira e Andrade (2010) referem que as funções têm sido um dos conteúdos mais valorizado nos exames nacionais do ensino secundário, uma vez que, segundo os mesmos autores, considera-se que os seus “*conhecimentos (...) são fundamentais para a compreensão do mundo em que vivemos*” (p. 6). No entanto, é um tema que suscita dificuldades para os alunos, começando, desde logo, pelo próprio conceito de função (Azevedo & Ponte, 2006; Saraiva & Teixeira, 2003). Kaput (1989), citado por Azevedo e Ponte (2006), também refere a “*dificuldade nos procedimentos com os símbolos algébricos e [a] falta de ligação destes com outras representações*” (p. 3).

São muitos os fatores que contribuem para o (in)sucesso escolar dos alunos, designadamente nesta temática. As estratégias de ensino têm sido apontadas como um deles (Almeida, 2006; Aquino, 2013; Araújo, 2014; Ponte & Serrazina, 2004), inferindo-

se que as práticas utilizadas por alguns professores, ainda muito centradas num ensino direto, poderão não ser as mais adequadas.

De facto, a importância do envolvimento do aluno na própria aprendizagem tem sido referida como fundamental no processo educativo, assim como a sua motivação e autonomia. Por isso, advoga-se que o *“papel do professor tem de ser o de, cada vez mais, ensinar e instigar a pensar”* (Aquino, 2013, p. 3).

Por outro lado, alguns autores defendem que o contacto prévio e extra aula com os tópicos que serão abordados formalmente na aula contribui, de forma significativa, para o processo de aprendizagem (Aquino, 2013; Araújo, 2014). Enquanto explicadora, a autora tem reparado que os alunos, em geral, apresentam melhor desempenho nas aulas quando, em momento prévio, contactam com os assuntos que aí serão lecionados mais formalmente. É importante referir que, no contexto de estágio, esta estratégia não era utilizada pela professora cooperante.

As tecnologias de informação e comunicação (TIC) poderão ter um papel fundamental em todo este processo, servindo como mediadoras da aprendizagem dos alunos, dadas as inúmeras vantagens da sua utilização em contexto educativo (Pais et al., 2014; Araújo, 2014; Agostinho, 2012; Cavalcante, 2010; Azevedo, Babo, Lopes, & Torres, 2008; Ponte, 2000). No entanto, embora os alunos estejam rodeados de tecnologias, não as usam muito a favor da aprendizagem (Barbosa, Barcelos, & Batista, 2015). Ao longo da Prática de Ensino Supervisionada, foi possível verificar que raramente se utilizavam as tecnologias. Este facto devia-se, em muito, estrutura condições logísticas da escola, que se encontrava em obras, o que dificultava a sua utilização.

Todos estes aspetos reforçaram o interesse pelo estudo.

## **2. Questões e objetivos de investigação**

Neste contexto, optou-se por realizar um estudo que será norteado pela seguinte questão de investigação – uma exploração prévia e extra-aula, mediada por tecnologias, de tópicos matemáticos, posteriormente abordados em sala de aula, contribui para que os alunos desenvolvam competências matemáticas e transversais?

Decorrente dessa questão orientadora do estudo, definiram-se como principais objetivos analisar a influência da realização prévia e extra-aula, por parte de alunos do 10.º ano de

escolaridade, de tarefas relacionadas com o tópico “Generalidades acerca de funções”, que será posteriormente lecionado em aula:

- na construção de conhecimento relativo a esse tópico e sua aplicação na resolução de tarefas variadas e
- no desenvolvimento da autonomia.

Desta forma, espero, com este estudo, contribuir para o meu desenvolvimento pessoal e profissional e, ainda, contribuir, um pouco que seja, para a construção de conhecimento na área da didática no que respeita às vantagens do estudo antecipado de tópicos antes da sua abordagem no contexto de sala de aula e o papel das tecnologias nesse processo.

### **3. Organização do estudo**

Este estudo encontra-se organizado em cinco partes. Em primeiro lugar, começa-se por contextualizar o estudo, apresentar o problema e as questões de investigação que se assumem como fio condutor deste trabalho.

O capítulo dois diz respeito à fundamentação teórica. Contempla uma revisão da literatura sobre a aprendizagem antecipatória e o desenvolvimento da autonomia referindo aspetos da aprendizagem como aquisição de respostas à aprendizagem como construção de conhecimento, da aprendizagem antecipatória e ainda do desenvolvimento da autonomia. Engloba ainda uma parte sobre as tecnologias no processo de aprendizagem e outra sobre as funções.

O terceiro capítulo é composto pelo método de investigação, onde se apresentam as opções metodológicas, a caracterização dos participantes, as técnicas e instrumentos de recolha de dados, a descrição do estudo e os procedimentos adotados no tratamento e apresentação dos dados.

No quarto capítulo, apresentam-se e discutem-se os resultados.

Por fim, no último capítulo, sintetizam-se os principais resultados do estudo, procurando responder à questão de investigação. Apresenta-se algumas limitações do estudo e sugestões para investigações futuras.

## **II. Fundamentação Teórica**

Apesar das inúmeras iniciativas de combate ao insucesso escolar dos alunos no que diz respeito à disciplina de Matemática, esta é uma realidade que continua a preocupar a população em geral (Viveiros & Lopes, 2008). Dado o impacto que esta disciplina tem na sociedade, mostra-se urgente repensar e tomar medidas por forma a contrariar esta situação.

Neste capítulo, serão analisados a aprendizagem antecipatória e o desenvolvimento da autonomia, as tecnologias no processo de aprendizagem e ainda alguns aspetos referentes ao estudo do tópico matemático funções.

### **1. Aprendizagem antecipatória e o desenvolvimento da autonomia**

Durante muito tempo, as causas do insucesso a matemática imputavam-se principalmente aos alunos e, em particular, às suas capacidades intelectuais (Aquino, 2013). No entanto, hoje percebe-se que a problemática é demasiado complexa, envolvendo inúmeros fatores (Cabrita, 1991; Cristóvão & Vieira, 2011).

Alguns desses fatores estão diretamente relacionados com a forma como se perspetiva a construção do conhecimento, a finalidade que se atribui à aprendizagem e as consequências das práticas letivas adotadas (Aquino, 2013; Ponte & Serrazina, 2004; Rosário, 2001).

#### **1.1 Da aprendizagem como aquisição de respostas à aprendizagem como desenvolvimento de competências**

Há muitos anos atrás, quando as turmas eram pequenas e mais homogéneas, o método expositivo, puramente transmissivo, parecia funcionar perfeitamente, parecendo que os alunos aprendiam efetivamente. Atualmente, devido à heterogeneidade e dimensão das turmas, este método mostra-se insuficiente nos processos de ensino e aprendizagem e parece já não funcionar (Aquino, 2013). O conceito de aprendizagem subjacente àquele método encara-a como um processo mecanicista, que visa apenas a aquisição de respostas com apelo à memorização. Segundo este, os alunos decoram demonstrações e resolvem exercícios rotineiros e repetitivos (Ponte, 2002). Leandro (2006) considera que o aluno

assume um papel passivo e que “a aprendizagem é observável e controlável através de um programa de estímulos e respostas” (p. 10).

Nos anos 60, começa a existir a preocupação em abandonar o método de ensino puramente expositivo, perspetivando a aprendizagem e o comportamento como resultado da interação com o meio. Nesta época, o aluno é visto como um “*processador de informação que recebe, transforma, utiliza e recupera informação*” (Leandro, 2006, p. 12), mantendo uma postura pouco ativa.

Posteriormente, nas duas últimas décadas do século XX, o aluno começa a assumir-se, cada vez mais, como ator principal nos processos de ensino e de aprendizagem (Nóvoa, 2009). Ao longo dos tempos, a aprendizagem foi vista como “aquisição de respostas” ou “aquisição de conhecimentos”. Atualmente, pensa-se na aprendizagem numa perspetiva ativa, uma vez que se “*entende o processo de aquisição de conhecimento como derivado das múltiplas interações realizadas pelo sujeito com os objetos do meio no qual está inserido*” (Bessa, 2008, p. 43).

A palavra “construtivismo” deriva da palavra construir, que, por sua vez, evoluiu da palavra instruir (Aquino, 2013). Tal como os processos de ensino e aprendizagem têm evoluído, o significado desta palavra parece, também ele, evoluir no mesmo sentido. Segundo Barbosa-Lima, Castro e Araújo (2006), a palavra instruir é a mais antiga para designar o processo pedagógico e está-lhe associado um sentido de praticar atividades repetitivas. Segundo os mesmos autores, a palavra construir significa “semear coletivamente” e é a que sintetiza “*as posições pedagógicas mais avançadas*” (p. 241). Leandro (2006) afirma que “*nessa sementeira, participam alunos e professores*” e que “*a colheita é uma nova sociedade e um novo conceito de cidadania*” (p. 243).

A teoria construtivista do conhecimento foi desenvolvida tendo por base a conceção filosófica desenvolvida por Emanuel Kant (Aquino, 2013) segundo a qual o sujeito é visto como um construtor ativo do conhecimento. Neste sentido, em termos educacionais, vários autores vêm defender que a aprendizagem ocorre através de uma interação entre o sujeito – aquele que procura o conhecimento – sobre determinado objeto – aquilo que se deseja conhecer (Bessa, 2008). Tal construção é potenciada pela interação com os outros e com os próprios afetados. Segundo esta perspetiva, espera-se que os alunos tenham uma atitude mais crítica, ativa e dinâmica na construção do próprio conhecimento (Aquino, 2013).

O construtivismo defende que a aprendizagem ocorre a partir do que o aluno já conhece (Ackermann, 2001). Rosário (2001) assevera “*que o que é aprendido pelos alunos é fruto de uma construção individual*” (p. 88). A autora evidencia, desta forma, a importância que as experiências prévias do aluno assumem na sua aprendizagem.

Corroborando os autores anteriores, Aquino (2013) defende que o

*“conhecimento adquire (..) um estatuto subjetivo uma vez que resulta das experiências e vivências de cada indivíduo sobre o mundo e cada indivíduo pode interpretar a realidade de uma forma pessoal e única, de acordo com a sua identidade, a sua cultura, os seus valores, a sua forma de ver e estar na vida”* (p. 34).

Defender o construtivismo não significa praticar um ensino assente em aulas expositivas (Ackermann, 2001), mas sim acreditar que a aprendizagem é concebida como processo ativo na criação de conhecimento, “*estando as atividades de ensino direcionadas para ajudar*” (Aquino, 2013). Neste sentido, a autonomia e iniciativa são solicitadas. Acredita-se que, desta forma, a aprendizagem é mais duradoura e eficaz.

São várias as definições de construtivismo apresentadas. No entanto, Aquino (2013), suportando-se de Pouts-Lajus e Riché-Magnier (1998), apresenta algumas características comuns a todas elas: o conhecimento é construído pelos alunos, a aprendizagem é um processo ativo e reflexivo, os conhecimentos prévios e as interações sociais influenciam a interpretação do aluno e a aprendizagem deve partir do todo para as partes devendo, por isso, ser feita de forma contextualizada.

De forma análoga, Ackermann (2001) considera que tal visão apresenta três características principais: (i) o ensino não é feito de forma direta; (ii) o conhecimento é construído em interação com o que nos circunda e (iii) a mudança conceitual tem vida própria.

De acordo com o referido até então, pode afirmar-se que um ensino assente na teoria construtivista baseia-se “na resolução de tarefas o mais complexas e abertas possível como os problemas, as explorações e as investigações e no desenvolvimento e exercitação do pensamento crítico” (Aquino, 2013, p. 36). A posição construtivista, segundo Pozo (1996), “*es en definitiva un aprendizaje mais eficaz, si atendemos a los rasgos que deben definir a un buen aprendizaje: mayor duración de lo aprendido y más fácil generalización*



*a nuevos contextos y tareas*” (p. 133). Aquino (2013) defende que esta teoria tem tido enorme contributo para a promoção do sucesso escolar.

Como já se referiu, a aprendizagem acontece com maior eficácia quando ocorre a partir do interesse e iniciativa do aluno. Tal como Andrade (2002) afirma, “*a construção de conhecimento está ligada a ações ou operações, ou seja, a transformações ativas do próprio sujeito*” (p. 69). Deste modo, é necessário adaptar os métodos de ensino e aprendizagem por forma a que estes possibilitem aprendizagens mais profundas e significativas e que reforcem o papel do aluno na construção do próprio conhecimento.

Foi baseado na teoria construtivista que Papert desenvolveu o seu trabalho – o construcionismo. De uma forma geral, esta abordagem defende que o aluno pode construir o próprio conhecimento por intermédio das tecnologias. Mais recentemente, outros autores como Ackermann (2001) revigoram a importância que as tecnologias assumem nos processos de educativos.

A era digital na educação está a impulsionar uma mudança nos processos de ensino e aprendizagem, sendo exigidas aos alunos competências que outrora não eram pensadas. Em pleno século XXI, o sucesso educativo não pode passar apenas pelos conhecimentos adquiridos ao nível dos conteúdos das disciplinas, é preciso desenvolver outras competências que são exigidas na sociedade que se encontra em constante mudança.

O Relatório para a UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura), da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI, coordenado por Jacques Delors (Delors et al., 2012), apresenta as competências do atual século estruturadas em 4 pilares. O pilar *aprender a conhecer* supõe, primeiro, a necessidade de aprender a aprender, debruçando-se sobre processos cognitivos como é o caso do raciocínio lógico, compreensão, dedução ou memória. Não se procura a aquisição de conhecimento estático, inerte, mas sim o seu domínio, por forma a compreender-se o mundo que nos rodeia (Delors et al., 2012). O segundo pilar, *aprender a fazer*, consiste essencialmente em aplicar, na prática, os conhecimentos teóricos contruídos. A capacidade de comunicação, de colaboração e de trabalhar em equipa são importantes neste pilar (Delors et al., 2012). O terceiro pilar, *aprender a viver com os outros*, relaciona-se com as atitudes e valores, visando o combate ao preconceito, ao conflito e às rivalidades (Delors et al., 2012). Por fim, o pilar *aprender a ser*, prende-se com o

desenvolvimento total da pessoa. Procura-se formar indivíduos autónomos e capazes de participarem de forma consciente na sociedade (Delors et al., 2012).

Contrariamente ao desejável, nem todos os pilares têm assumido a mesma importância no ensino. Os pilares mais considerados têm sido *aprender a conhecer* e *aprender a fazer*, embora este último esteja mais relacionado com o ensino profissional. Já os restantes dois são, muitas vezes, descurados ou simplesmente assumidos como implícitos nos outros.

A escola é o lugar apropriado para se desenvolver estas competências. Não se deve focar a atenção apenas no conhecimento para ‘hoje’, mas também preparar os alunos para a aprendizagem ao longo da vida (Silva, 2015).

É impossível não reparar na constante mudança e na onnipresença das tecnologias e da internet no mundo que nos rodeia. No entanto, a sala de aula tende-se a manter como há dois séculos atrás (Silva, 2015). Mostra-se, portanto, importante repensar os processos de ensino e de aprendizagem por forma a desenvolver outras competências que não as estritamente relacionadas com o conhecimento fechado dos conteúdos das diversas disciplinas.

## **1.2 Aprendizagem antecipatória**

A necessidade de repensar estratégias que visem uma melhoria do processo educativo e aprendizagem é uma realidade presente na sociedade atual. São vários os autores que, como se pode constatar na secção anterior, defendem que essas estratégias devem contemplar uma aprendizagem ativa onde o aluno é o ator principal no processo de aprendizagem, na interação com os outros e com os artefactos.

Tradicionalmente, os professores ocupam o tempo da aula a falar sobre conceitos e temáticas e realizam ainda algumas tarefas. Por vezes, os alunos ficam responsáveis por resolver tarefas em tempo extra-aula que, geralmente, estão relacionadas com o assunto tratado na aula. Dada esta estruturação, é possível perceber que a parte mais prática é realizada fora do contexto de sala de aula. É uma estratégia que surgiu há muito tempo e que hoje em dia ainda resiste. No entanto, pensa-se não ser a mais adequada já que as tarefas que envolvem um maior esforço cognitivo são geralmente realizadas fora da aula, sem qualquer acompanhamento por parte do respetivo professor. Embora seja esta a

lógica de organização de sala de aula a mais frequente, não significa que seja a adotada para tratar todos os conteúdos, nem por todos os professores.

Contrariando esta visão tradicional da sala de aula, surge o *Flipped Classroom* que, de uma forma muito sucinta, é visto como a inversão da atual configuração da sala de aula. Embora seja praticada há alguns anos, apenas na última década começou a atrair a atenção da comunicação social com a sua divulgação através da *Internet*, como é o caso dos *Blogs* e páginas como *edutopia.org*, *Flipped Learning Network* ou *Flippedteacher*, e em conferências educacionais promovidas pelos próprios autores: Jon Bergmann e Aaron Sams.

Durante a Revolução industrial, Silva (2015) refere que os professores de Inglês e de Artes usavam uma estratégia semelhante – os alunos liam em casa e nas aulas discutiam e sintetizavam a sua aprendizagem. Defende ainda que, antes de 2007 também se utilizava este conceito, mas apenas com o objetivo de concretizar cursos *online*.

Segundo Valente (2014), esta estratégia tem sido adotada e investigada em várias universidades dos Estados Unidos, Brasil e mesmo em Portugal. Tem também sido alvo de alguns estudos no âmbito de outros ciclos de ensino, embora estes sejam menos significativos.

*Flipped Classroom*, também usualmente designado por sala de aula invertida, é uma abordagem que visa a exploração dos conteúdos pelos alunos através de recursos, no geral disponibilizados *online*, antes das aulas. Deste modo, o tempo destinado à aula é ocupado com determinadas atividades, que podem ser desenvolvidas em grupo ou individualmente, permitindo assim maior interação entre professor-aluno ou aluno-aluno e ainda um melhor acompanhamento do aluno pelo professor.

Trevellin et al. (2013) definem *Flipped Classroom* como sendo “*um modelo de ensino onde a apresentação do conteúdo da disciplina é realizada através de vídeos (...) e as atividades complementares propostas pelo professor, ou seja, as “tarefas” são realizadas em sala de aula*” (p. 5).

Bergmann e Sams (2012) afirmam que esta abordagem permite aumentar a quantidade de atividades que se podem realizar durante a aula, tal como se pode ver na tabela seguinte.

Aula tradicional		Aula <i>Flipped Classroom</i>	
Atividades	Tempo	Atividades	Tempo
Atividade <i>warm-up</i>	5 min	Atividade <i>warm-up</i>	5 min
Correção trabalho de casa	20 min	Esclarecimento de dúvidas em relação ao estudo prévio	10 min
Introdução dos conteúdos temáticos	30-45 min	Realização de atividades	75 min
Realização de atividades	20-35 min		

**Quadro 1** – Comparação das atividades e respetivo tempo numa aula tradicional e numa aula *Flipped Classroom* de 90 minutos (Bergmann & Sams, 2012)

Segundo Bergmann e Sams (2012), o professor deixa de ser aquele que debita informação e passa a ter o papel de auxiliar o aluno, ajudando-o, por exemplo, a esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir no âmbito das atividades propostas tendo em vista o desenvolvimento de competências. Portanto, o professor deve circular pela sala com o intuito de fornecer *feedback* sobre o desempenho dos alunos, mediar discussões, controlar a turma e avaliar os trabalhos desenvolvidos. No final, deve sempre corrigir as atividades que os alunos estiveram a desenvolver.

Dadas as circunstâncias, espera-se que o aluno assuma uma atitude mais ativa sendo o responsável pela própria aprendizagem já que esta depende do trabalho prévio e extra-aula que ele próprio desenvolve. Bergmann e Sams (2012) dizem que esta é uma das principais dificuldades que os professores sentem ao aplicar este tipo de abordagem já que, se os alunos não estudarem os assuntos antes da aula, a sessão planeada não decorre de forma a que ocorra uma aprendizagem significativa.

Trevellin, Pereira e Neto (2013), suportando-se em Bennet *et. al.* (2012), mencionam algumas características deste tipo de abordagem:

- as discussões são levadas pelos alunos para a sala de aula;
- o pensamento crítico atinge um maior nível;
- os alunos trabalham colaborativamente;
- os alunos desafiam-se entre si em função do conhecimento adquirido;

- as tarefas são exploratórias e podem ir além do currículo da disciplina;
- os alunos têm um papel ativo e fundamental na aprendizagem.

Bergmann, Overmyer e Wilie (2013) referem-se a esta abordagem mencionando que é um meio que permite aumentar a interação entre alunos e professores, salientando que os torna os principais responsáveis pela própria aprendizagem.

São várias as vantagens que diversos autores mencionam acerca desta abordagem. Tucker (2012) refere o facto de os alunos terem mais tempo para elaborar as atividades em sala de aula e de permitir maior acompanhamento dos alunos que revelam mais dificuldades. Trevellin et al. (2013), suportando-se em outros autores afirmam que uma aula do tipo *Flipped Classroom* permite aperfeiçoar as interações em sala de aula e desenvolver uma aprendizagem ativa. Herreid e Schiller (2013), também baseados em outros autores, acrescentam ainda como vantagens a possibilidade de os professores perceberem quais as dúvidas e estilos de aprendizagem dos alunos; de poderem otimizar de forma eficaz e criativa o tempo em sala de aula; de serem os alunos a controlar o próprio ritmo de trabalho e de se tornarem membros ativos no processo de aprendizagem.

O processo de implementação de uma abordagem *Flipped Classroom* não é fácil e exige alguns cuidados. O professor deve conhecer os alunos e compreender os seus hábitos de aprendizagem para que haja uma adaptação adequada (Trevellin et al., 2013). O facto de não existir um modelo definido para esta abordagem é uma dificuldade que os professores têm revelado sentir.

Relativamente aos alunos, durante a implementação deste processo, é normal existir alguma resistência por parte dos discentes devido ao facto de ser um método diferente do que estão habituados. Em relação a isto, Tucker (2012) menciona que, ao longo do tempo, os alunos começam a adaptar-se, mostrando melhores atitudes porque começam a ganhar confiança.

A abordagem aqui descrita exige, por parte dos alunos, muita responsabilidade e autonomia, pois são eles próprios que gerem o seu tempo por forma a conseguirem, num momento prévio ao da aula, estudar ou realizar as atividades propostas.

### 1.3 Desenvolvimento da autonomia

O tema autonomia tem vindo a adquirir destaque no âmbito da educação quer a nível nacional como internacional (Palha, 2006). Como já se viu, defende-se que o aluno deve ter um papel ativo nas próprias aprendizagens, sendo ele o principal responsável por estas. Por outro lado, o professor deve abandonar o papel de “transmissor de conhecimentos” e passar a ser o mentor do processo de aprendizagem.

O NCTM (2007) defende que se deve fomentar a autonomia dos alunos pois, estes *“aprendem mais e melhor quando controlam a sua aprendizagem”* (p. 22). No seguimento deste raciocínio, o professor deve ser capaz de ajudar os alunos de modo a fornecer-lhes ferramentas com o intuito de os tornar autónomos e autorreguladores da própria aprendizagem (Aquino, 2013).

Segundo o dicionário *Priberam*, a palavra autonomia significa “liberdade para usar leis próprias”. É uma palavra que está relacionada com independência, embora esta, por si só, não seja suficiente para caraterizar autonomia. É preciso também autorregulação, isto é, capacidade de criar as próprias regras e leis. Neste sentido, segundo Palha (2006), *“um aluno autónomo é independente do professor e possui um conjunto de normas que o guiam na sua tomada de decisões”* (p. 2), ou seja, não aguarda que o professor lhe forneça todas as indicações do modo como deve agir.

Pozo (1996) defende que a autorregulação das aprendizagens é um processo no qual os alunos participam de forma ativa, de modo a orientar, controlar e regular a sua aprendizagem, tendo em vista o alcance dos objetivos cognitivos predefinidos.

De forma análoga, Rosário (2001) considera que os alunos autorreguladores da sua aprendizagem integram *“o uso de estratégias específicas para alcançar os objetivos académicos”* (p. 88). Zimmerman e Martinez-Pons (1986), referidos por Rosário (2001), apresentam estratégias de autorregulação da aprendizagem que se prendem com a autoavaliação, organização e transformação, estabelecimento de objetivos e planeamento, procura de informação, tomada de apontamentos, estrutura ambiental, auto consequências, repetição e memorização, procura de ajuda social e revisão de dados.

Num estudo mais recente, Aquino (2013) corrobora o que os autores anteriores afirmam, dizendo *“que os alunos de alto rendimento escolar [caracterizam-se] por auto regular*

*as suas aprendizagens, implicando-se no seu processo de aprendizagem, gerindo as aprendizagens e controlando os processos que lhes estão subjacentes”* (p. 33).

Neste contexto, entende-se que autonomia é a capacidade de orientar a própria aprendizagem (Aquino, 2013), gerindo o tempo e os recursos disponíveis por forma a desenvolver competências importantes, quer seja em contexto académico ou não (Silva, Simão, & Sá, 2004; Leandro, 2006; Fernández et al., 2013). Não se deve confundir autonomia com isolamento, pois a aprendizagem pode ocorrer através da interação com outros (Aquino, 2013).

Neste sentido, o professor deve orientar o aluno e fornecer-lhe ferramentas que lhe permitam a construção de conhecimento em interação com o contexto (Leandro, 2006; Ponte & Quaresma, 2012). Não se pretende com esta estratégia aumentar a carga horária da disciplina, mas sim apostar no envolvimento pessoal do aluno na construção das suas próprias aprendizagens (Pozo, 1996).

Desta forma, um aluno autónomo é capaz de procurar respostas aos problemas e aos obstáculos com que se depara, visando os objetivos propostos.

A atual realidade evidencia que os alunos, no geral, são pouco autónomos. O estudo que Aquino (2013) realizou com estudantes universitários do 1.º ano, mostra que a maioria dos alunos *“não possuem competências de autonomia que lhes permita fazer a auto regulação das aprendizagens”* (p. 347).

Araújo (2014) trabalhou também com alunos de uma universidade e, com a sua investigação, verificou que ambientes virtuais de aprendizagem podem ser promotores de autorregulação da aprendizagem. Constatou que o *“uso frequente da plataforma [...] pode contribuir para o desenvolvimento da autonomia”* e *“facilita o estudo autónomo”* (p. 359).

## 2. As TIC no processo de aprendizagem

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) trazem novos desafios às várias dimensões da vida. Ainda no século XX, Pouts-Lajus e Riché-Magniet (1998) defendiam esta posição afirmando que a escola não pode parar de se adaptar ao mundo que está em constante mudança. Na opinião dos autores referidos, só assim corresponderá às necessidades da sociedade em que se insere. Em relação a este assunto, Aquino (2013) afirma que *“a escola não pode ignorar as constantes mutações e a evolução das tecnologias e suas implicações na sociedade mas tem, sim, de preparar cidadãos capazes de responder às exigências do mundo em que vivem”* (p. 24).

Ao longo da vida, os cidadãos têm de enfrentar constantes mudanças e deparam-se com a necessidade de aprender novas coisas. Assim, é importante que os alunos, desde logo, desenvolvam competências que lhes permitam adaptarem-se de forma rápida às vicissitudes com que se irão deparar (Andrade, 2002).

É certo que os atuais alunos fazem parte de uma geração que nasceu e que está integrada no mundo das tecnologias digitais. A maioria utiliza os recursos disponibilizados pelas TIC como é o caso de, por exemplo, as redes sociais. Apesar disso, o que se tem verificado é que muitos alunos não as utilizam a favor da aprendizagem (Barbosa *et al.*, 2015).

Cada vez mais se tem constatado a presença das tecnologias nas escolas. No entanto, como Aquino (2013) refere, as suas finalidades são essencialmente servir de suporte à inscrição de turmas e lançamento de notas, permitir comunicação entre a escola e os encarregados de educação, apoiar o ensino presencial (apresentações digitais, por exemplo) e ainda para facultar documentos para posterior estudo.

Apesar de os professores terem vindo a receber formação em informática, estes não têm conseguido utilizar convenientemente as tecnologias a favor do processo de aprendizagem (Andrade, 2002).

Muitos estudos têm mostrado que o desempenho dos alunos melhora de forma significativa quando as tecnologias, sobretudo *online*, são integradas no processo de aprendizagem (Pais *et al.*, 2014; Araújo, 2014; Agostinho, 2012; Cavalcante, 2010; Azevedo, Babo, Lopes, & Torres, 2008; Ponte, 2000). É uma estratégia que, apesar de ser para facilitar o processo de desenvolvimento de competências, exige dos alunos maior empenho e autonomia.



As vantagens na utilização das tecnologias e da *Internet* são reconhecidas por vários autores. Ponte (2000) apresenta algumas vantagens relativamente ao uso das TIC na aprendizagem específica da matemática. Defende que valoriza as capacidades intelectuais do aluno, não dando importância apenas às competências de cálculo ou de manipulação simbólica; facilita o desenvolvimento de projetos de modelação e a realização de tarefas de investigação ou exploração; o envolvimento nas atividades que fazem uso das tecnologias permite desenvolver atitudes positivas face à matemática já que os alunos assumem um papel mais ativo.

Ricoy e Couto (2011) mencionam também algumas vantagens das TIC e da *Internet*, como, por exemplo, funcionam como motivação para os alunos, servem meio de comunicação entre alunos e entre alunos e professor. Sosa, Berger, Saw e Mary (2011) defendem que as tecnologias *online* podem servir como fonte de motivação e promover o seu maior envolvimento pois além de promover a interatividade entre aplicações, facilitando a aplicação de conhecimentos, permite também que o aluno processe a informação de acordo com o seu próprio ritmo.

Valente (2014) reconhece também os benefícios das TIC quando são utilizadas como ferramentas cognitivas e que podem ser exploradas de forma útil numa abordagem de sala de aula invertida.

O próprio Programa de Matemática recomenda a utilização das tecnologias alertando para uma utilização de forma criteriosa, de modo a que não fique comprometido o processo de aprendizagem e de avaliação (ME, 2013a).

No entanto, existem também alguns constrangimentos ao uso das TIC no apoio à aprendizagem. Face à inúmera variedade de informação disponibilizada e à facilidade de conexão com outros assuntos, torna-se propício ocorrer a dispersão dos alunos no momento em que navegam pela *Internet* (Aquino, 2013). Cabe ao professor o importante papel de promover competências que se relacionam com a seleção e utilização da informação que se fornece nos ambientes digitais (Ricoy & Couto, 2011).

Relativamente a competências necessárias ao professor, Ponte e Serrazina (2004) mencionam o conhecimento de implicações sociais e éticas das TIC, a capacidade de uso de *software* utilitário, a capacidade de uso e avaliação de *software* educativo e ainda a capacidade de uso de TIC em situações de ensino-aprendizagem.

O professor é um ator importante na orientação e dinamização das atividades, devendo estar atento ao percurso dos seus alunos. Assume um papel importante a nível científico, mas também lhe são exigidas novas competências de carácter tecnológico e pedagógico. Ricoy e Couto (2011) afirmam que os professores que têm mais anos de experiência são os que não tiveram, durante a sua formação inicial, oportunidade de desenvolver competências relacionadas com as tecnologias. Já os que se formaram mais recentemente, embora tenham tido alguma formação, esta ainda é muito incipiente.

São vários os estudos que confirmam a importância das TIC no processo de aprendizagem. Aquino (2013), num estudo realizado com alunos universitários que frequentavam uma unidade curricular de Cálculo, verificou que os alunos que mais conhecimentos construíram foram os que acederam à plataforma *online* que disponibilizava tarefas interativas e permitiam assim estudar os conteúdos abordados. Segundo a autora, as TIC “constituíram-se uma mais-valia na promoção do sucesso dos alunos” (Aquino, 2013, p. 349).

Araújo (2014), também com base num trabalho com estudantes universitários, vem confirmar a importância das tecnologias *online* quando utilizadas como ferramentas no processo de aprendizagem dos alunos.

### 3. Generalidades sobre funções reais de variável real

Apesar de ser considerado um conceito fundamental da matemática e da ciência em geral, que sempre foi incluído nos currículos ao longo dos tempos, continua a ser difícil para os alunos perceber o que é uma função, os conceitos associados e toda a linguagem que a envolve (Maganarius, Buligon, & Martins, 2015; Silva & Rezende, 1999).

Por ser uma noção muito importante em matemática com aplicabilidade em diversos contextos (cotidiano, engenharia, medicina, desporto, entre outros), muitos têm sido os estudos em torno desta temática (Azevedo & Ponte, 2006; Leinhardt, Stein, & Zaslavsky, 1990; Ponte & Quaresma, 2012; Postal, Haetinger, Madalena, & Schossler, 2011; Sajka, 2003; Saraiva et al., 2010; Saraiva & Teixeira, 2003).

Neste subcapítulo, aborda-se a evolução do conceito de função, as funções no currículo português e ainda as dificuldades que os alunos manifestam.

#### 3.1. Evolução do conceito

O conceito de função, tal como o conhecemos hoje, levou muito tempo a ser construído. Teve origem, embora ainda de uma forma pouco evidente, com Newton (1642-1727), aquando do seu trabalho com séries infinitas. Mais tarde, Leibniz (1646-1716) foi o primeiro a utilizar o termo função, seguindo-se Bernoulli (1667-1748) que apresentou, pela primeira vez, a definição de *“função de uma variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes”* (Ponte, 1990, p. 3). Para este último, uma função podia ser representada por apenas uma combinação de símbolos algébricos (Botelho & Rezende, 2011).

Esta definição foi melhorada mais tarde, por Euler (1707-1783), substituindo o termo quantidade por expressão analítica. Foi este matemático que denotou, pela primeira vez, uma função de  $x$  por  $f(x)$ , notação que atualmente ainda se utiliza.

Até ao século XIX, a noção de função foi assim encarada. Em 1822, Fourier (1768-1830) retomou o assunto, relacionando o conceito de função com o de somas infinitas (Silva & Rezende, 1999). No entanto, foi Dirichlet (1805-1859), aquando do estudo das séries de Fourier, quem apresentou a definição de função que Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles (1997) consideram ser muito próxima da que se utiliza atualmente: *“uma função  $f: A \rightarrow B$  consiste em dois conjuntos, o domínio  $A$ , o conjunto de chegada*

*B, e uma regra que associa a cada elemento  $x$  de  $A$  (objeto) um só elemento  $y$  de  $B$  (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em  $A$  com valores em  $B$ . Chama-se contradomínio de  $f$  ao subconjunto de  $B$  formado pelas imagens” (p. 13). Esta interpretação dada por Dirichlet trouxe a ideia de função como correspondência arbitrária entre duas variáveis, independente de expressões algébricas (Botelho & Rezende, 2011).*

Neste momento, considerava-se apenas correspondências entre conjuntos numéricos. No entanto, já no século XX, Cantor (1845-1918) estende a noção de função de forma a incluir correspondências arbitrárias entre conjuntos, sejam eles numéricos ou não.

O conceito de função foi construído e evoluindo durante alguns séculos, como se pode constatar pela breve descrição histórica realizada. Bivar, Grosso, Oliveira, e Timóteo (2013), autores do atual programa de matemática do ensino secundário, definem função de uma forma muito análoga à anterior afirmando que “*dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , (...) fica definida uma «função  $f$  (ou aplicação) de  $A$  em  $B$ », quando a cada elemento  $x$  de  $A$  se associa um elemento único de  $B$  representado por  $f(x)$ ” (p. 54).*

### **3.2. Funções nos currículos**

Segundo o atual Programa de Matemática do Ensino Básico, o estudo das funções, em matemática, tem início no 3.º Ciclo do Ensino Básico (CEB), no domínio *Funções, Sequências e Sucessões*. Ao longo dos três anos de ensino deste ciclo, os alunos são confrontados com o conceito de função, funções afins, quadráticas, de proporcionalidade direta e inversa. Embora seja um tema que apareça pela primeira vez no 7.º ano, a noção de gráfico cartesiano de uma correspondência poderá aparecer no 2.º CEB aquando da abordagem do tema Organização e Tratamento de Dados (ME, 2013b).

No ensino secundário, as funções assumem um papel preponderante no currículo sendo, por isso mesmo, um dos conteúdos mais valorizados até então nos exames nacionais do ensino secundário (Saraiva et al., 2010).

O estudo de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas aparece no atual programa do 10.º ano pela primeira vez (ME, 2013a). No programa anterior, apenas se tratava da injetividade no 11.º ano, aquando da referência de função inversa (ME, 2001). O mesmo acontecia com os conceitos de função composta e função inversa que, no programa

anterior, apenas eram tratados no 11.º ano (ME, 2001) e, segundo o programa em vigor, atualmente é um assunto abordado no 10.º ano.

Contrariamente ao anterior, o Programa homologado em 2013 concede liberdade e autonomia pedagógica aos professores, não apresentando indicações metodológicas específicas (ME, 2013a).

### **3.3. Dificuldades no processo de aprendizagem**

As dificuldades nesta temática são sentidas, desde logo, com a apresentação do próprio conceito de função. Sajka (2003) e Saraiva et al. (2010) afirmam que a própria notação pode confundir os alunos, na medida em que  $f(x)$  representa tanto o nome da função como o seu valor. O uso de símbolos relacionados entre si é, também, uma barreira no entendimento deste conceito (Saraiva et al., 2010) que, segundo Sfard (1991), referido por Sajka (2003), deve ser primeiramente analisado operacionalmente – na qual se identificam os próprios processos ou produto de processos – e, só depois, estruturalmente – dando-se um tratamento puramente matemático.

Alguns autores referem ainda que os alunos têm tendência para memorizar a definição de função sem a compreender o que, devido à falta de capacidade de manipular símbolos, se mostra insuficiente para alcançarem a essência da definição (Azevedo & Ponte, 2006; Saraiva et al., 2010).

Por forma a ultrapassar essas dificuldades, considera-se necessário fazer uso das diferentes representações das funções – gráfica, algébrica, tabelar e verbal – para poderem ser estabelecidas diferentes conexões entre elas (Azevedo & Ponte, 2006; Saraiva et al., 2010; Semião & Canavarro, 2012; Vargas & Silva, 2011).

Vargas e Silva (2011) defendem o uso de tarefas contextualizadas nos processos de ensino e aprendizagem, pois consideram que este tipo de abordagem *“permite uma visualização mais dinâmica do fenómeno funcional quando comparada a montagem da tabela apenas por uma expressão analítica pré-definida, pois permitem a compreensão da variação simultânea de duas grandezas”* (p. 1).

Da mesma forma, Ponte e Quaresma (2012) defendem que tarefas com contexto real devem funcionar como um suporte para a aprendizagem. No entanto, asseveram que todos os contextos, sejam realísticos, de semirrealidade ou puramente matemáticos são

importantes afirmando que a própria “*Matemática constitui contexto onde os alunos devem trabalhar*” (p. 196).

Uma das dificuldades que a literatura reporta é a fácil confusão entre o conceito de função e o de injetividade de uma função (Domingos, 1994; Pelicano, 2014). Esta confusão começa, muitas vezes, desde os primeiros momentos com que os alunos contactam com o conceito de função.

Os conceitos inerentes à função composta provocam também algumas dificuldades aos alunos. O próprio conceito de composição de funções é muitas vezes alvo de complicações. Neste sentido, Barbosa (2009) propõe o uso de exemplos empíricos, o uso de diagramas ou ainda a analogia a uma linha de montagem, onde se clarifica a ordem das operações.

### III. Método de Investigação

Antes de mais, recorde-se que, com este estudo, pretende-se analisar a influência de uma exploração prévia e extra-aula, por parte de alunos do 10º ano de escolaridade, de tarefas relacionados com o tópico “Generalidades acerca de funções”, que será posteriormente lecionado em aula:

- na construção de conhecimento relativo a esse tópico e sua aplicação na resolução de tarefas variadas e
- no desenvolvimento da autonomia.

Neste capítulo, apresenta-se e fundamenta-se o método usado neste estudo tendo em conta os objetivos que o mesmo persegue. É composto essencialmente por cinco partes. Começa-se por apresentar e justificar opções metodológicas, caracteriza-se os participantes, identificam-se as técnicas e instrumentos de recolha de dados, descrevem-se as principais fases do estudo e explica-se a forma como foram tratados os dados e apresentados os resultados.

#### 1. Opções metodológicas

Este tópico incide na fundamentação das opções metodológicas adotadas no âmbito deste estudo que se considera ser um estudo de caso múltiplo de natureza qualitativa.

##### 1.1. Investigação qualitativa

Atendendo às questões de investigação subjacentes ao estudo e às quais se pretendia dar resposta, optou-se por um estudo de natureza qualitativa. A investigação qualitativa também se designa, com frequência, por naturalista já que *“o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado”* (Bogdan & Biklen, 1994, p. 17). Coutinho (2011) defende também que os dados são recolhidos *“no meio natural em que ocorrem (...) com a participação ativa do investigador”* (p. 27). De facto, o estudo que aqui se apresenta decorreu em contexto educativo tendo a professora assumindo-se também como investigadora.

Os investigadores que adotam este tipo de metodologia preocupam-se mais pelo processo do que pelos resultados finais interessando-lhes, principalmente, perceber qual o

significado atribuído às experiências pelos participantes (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011). Dadas as finalidades e objetivos deste estudo, não interessou apenas ver o resultado final, mas sim analisar todo o percurso que os alunos fizeram, de forma a ver se desenvolveram a autonomia, construíram conhecimento e foram capazes de o aplicar na resolução de novas tarefas e ainda tentar interpretar porque o terão feito.

Segundo esta abordagem qualitativa, defende-se ainda que a análise dos dados é feita de forma indutiva e que os resultados são apresentados de forma descritiva (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011). A autora não teve como objetivo confirmar ou rejeitar qualquer hipótese construída previamente por outros investigadores nem generalizar o estudo para uma qualquer população.

## **1.2. Design de estudo de caso múltiplo**

Dentro da investigação de natureza qualitativa, considerou-se mais adequado optar por um estudo de caso múltiplo, embora não se tenha investido muito na sua profundidade dadas as limitações temporais para a sua realização e o contexto de estágio pedagógico.

São vários os autores que defendem que o principal objetivo do estudo de caso é compreender determinados acontecimentos, olhando mais para o processo do que para o final, e procurar responder ao “como” e “porquê” desses mesmos acontecimentos (Azevedo & Ponte, 2006; Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011; Yin, 2001).

Ponte (2006) considera oportuno optar por uma investigação com *design* de estudo de caso quando esta

*“se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse”* (p. 2).

É o que Bogdan e Biklen (1994) referem quando afirmam que *“o foco do estudo centra-se numa organização particular (...) ou nalgum aspeto particular dessa organização”* (p. 90).

Para Yin (2001), o estudo de caso pode ser utilizado quando se pretende lidar com situações contextualizadas. O autor anterior refere ainda que este tipo de investigação é



desenvolvido com base em pressupostos teóricos que guiarão a recolha e análise de dados que deverão ser variados para que haja a possibilidade de cruzar as diversas evidências.

De entre a turma, foram analisados alguns alunos em particular, selecionados de acordo com alguns critérios tendo como fim “*ajudar a conhecer melhor a diversidade de realidades que existem dentro de um certo grupo*” (Ponte, 2006, p. 5). A decisão de se optar por um estudo múltiplo prende-se com o facto de se querer mostrar a variedade de casos (Bogdan & Biklen, 1994).

Tratando-se da primeira investigação da autora, a sua inexperiência é evidente, pelo que se assume ser um estudo com carácter exploratório, sob esse ponto de vista. Considera-se ainda que assume também um propósito descritivo já que se pretende, essencialmente, descrever, dizendo “*«como é» o caso em apreço*” (Ponte, 2006, p. 6).

## **2. Caraterização dos Participantes**

Este estudo decorreu numa Escola Secundária com 3.º Ciclo do Ensino Básico do distrito de Aveiro, numa turma do 10.º ano de escolaridade composta por 28 alunos, da qual os casos foram selecionados. Assim, considerou-se como participantes diretos a turma e a professora estagiária que, neste contexto, se assumiu também como investigadora. De forma indireta, estiveram também envolvidas a professora cooperante, a colega de estágio e ainda uma outra colega de mestrado.

### **2.1. A escola**

O estudo foi realizado numa escola do distrito de Aveiro que é a sede do Agrupamento de Escolas e engloba uma Escola Secundária, uma Escola Básica, quatro escolas do 1.º CEB e quatro Jardins de Infância. As realidades socioeconómicas das famílias dos alunos são muito distintas já que engloba zonas da cidade e de algumas das suas freguesias.

Na Escola leciona-se, em regime diurno, do 3.º Ciclo do Ensino Básico ao Ensino Secundário. Ao nível do 3.º CEB, a oferta complementar no 7.º ano é Educação Cívica; no 8.º ano, História e Património Local e, no 9.º ano, Artes e Ambiente ou Dança e Movimento. No mesmo ciclo, a oferta escolar ao nível dos 7.º e 8.º anos é Expressão Corporal ou Expressão Artística. No que respeita ao ensino Secundário, oferece Cursos

Científico-Humanísticos (Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades). Estes cursos são orientados para o prosseguimento de estudos superiores. Oferece, ainda, Cursos Profissionais que dão equivalência ao nível 4 de qualificação: Manutenção Industrial, Comércio, Gestão e Eletromecânica.

Em regime noturno, oferece um Curso de Educação e Formação de Adultos: Curso Técnico de Instalações Elétricas.

Possui alguns projetos integradores e de complemento curricular: Desporto escolar; Erasmus<sup>+</sup>; Eco escolas; Projeto *Ler<sup>+</sup>* do Plano Nacional de Leitura; Projeto de voluntariado da leitura. Contempla ainda Currículo Específico Individual; Clube de leitura para Pais e Encarregados de Educação.

Por se encontrar em obras à altura do estudo, é difícil descrever a sua estrutura. Possuía um bloco renovado onde se encontrava a secretaria, a direção, a biblioteca, a reprografia, a sala de professores e ainda os laboratórios. Contemplava ainda um bloco com oficinas, salas onde os alunos dos cursos Profissionais tinham algumas aulas. As restantes aulas eram lecionadas em contentores situados nos espaços livres da escola. O mesmo acontecia com o bar e cantina, que se encontravam alternativamente num contentor até que as obras estivessem concluídas.

De entre as áreas prioritárias de intervenção mencionadas no Projeto Educativo da Escola em vigor em 2016/17 faz parte a intenção de estimular a autonomia, responsabilidade e gosto pela aprendizagem e de promover um ensino centrado no aluno. Engloba ainda o objetivo de integrar as TIC nos processos de ensino e de aprendizagem por forma a acompanhar a evolução tecnológica. Desse documento faz também parte o desenvolvimento do trabalho colaborativo, a interdisciplinaridade, a dinamização de projetos ecológicos e o envolvimento cívico dos alunos. Neste sentido, o projeto de investigação que se desenvolveu está alinhado com as intenções da Escola.

## **2.2. . A turma**

Após uma análise das fichas biográficas dos alunos e de um questionário preenchido por estes, procedeu-se à caracterização da turma.

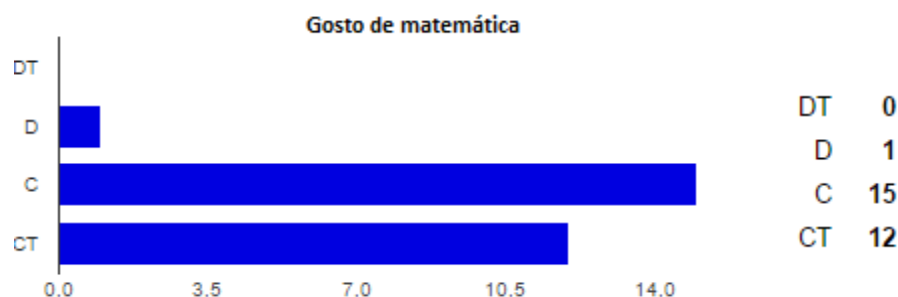
A turma que participou no estudo era do Curso Científico Humanístico de Ciências e Tecnologias. De entre os 28 alunos, 12 são do sexo feminino e 16 do sexo masculino. No momento de resposta ao questionário, 10 alunos tinham 16 anos e os restantes 15 anos.

No questionário, quando confrontados com a pergunta “*em relação às três disciplinas de que mais gostas, a matemática está incluída?*” 22 responderam que sim e 6 responderam que não.



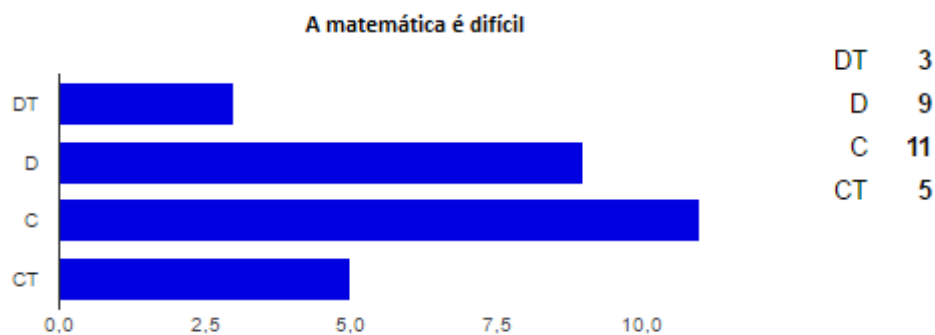
**Figura 1** – Frequência relativa da variável “em relação às três disciplinas de que mais gostas, a matemática está incluída?”

Relativamente à afirmação “*gosto de matemática*” nenhum assinalou discordo totalmente, 1 assinalou discordo, 15 concordo e 12 concordo totalmente.



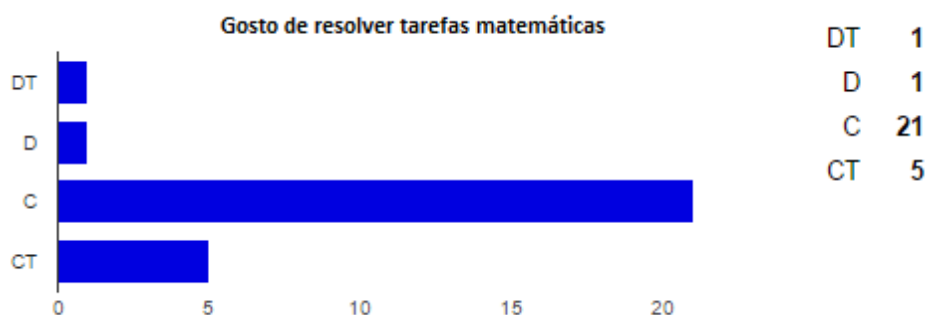
**Figura 2** – Frequência absoluta da variável “gosto de matemática”

Apesar de quase todos os alunos terem referido que gostavam de matemática, há alguns que a consideram difícil, como se pode constatar na afirmação “*a matemática é difícil*”, onde 3 assinalaram discordo totalmente, 9 discordo, 11 concordo e 5 concordo totalmente.



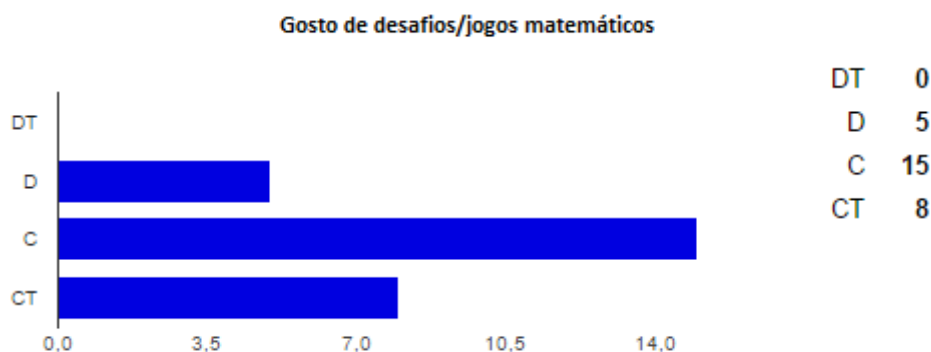
**Figura 3** – Frequência absoluta da variável “gosto de matemática”

Em relação à afirmação “*gosto de resolver tarefas matemáticas*”, 1 aluno assinalou discordo totalmente, 1 discordo, 21 concordo e 5 concordo totalmente.



**Figura 4** – Frequência absoluta da variável “gosto de resolver tarefas matemáticas”

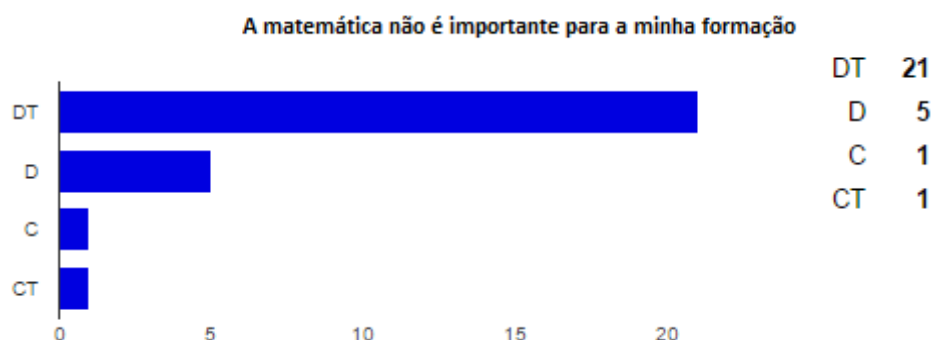
Já quando lhes foi apresentada a afirmação “*gosto de desafios/jogos matemáticos*”, nenhum assinalou discordo totalmente, 5 assinalaram discordo, 15 concordo e 8 concordo totalmente.



**Figura 5** – Frequência absoluta da variável “gosto de desafios/jogos matemáticos”

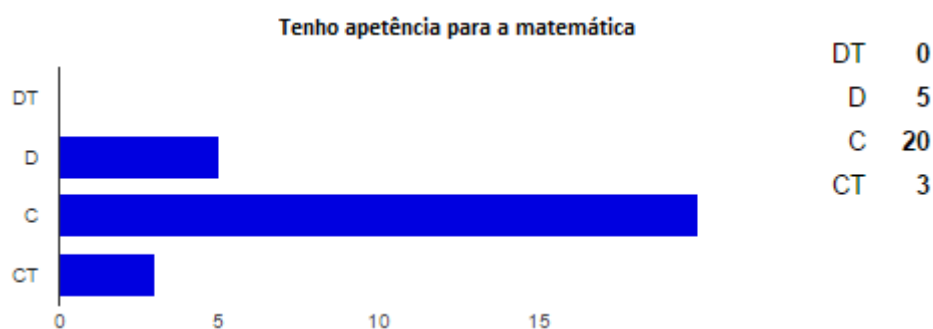
A grande maioria da turma reconhece a importância da matemática na própria formação pois, quando se depararam com a afirmação “*a matemática não é importante para a*

*minha formação*”, 21 assinalaram discordo totalmente, 5 discordo, 1 concordo e 1 concordo totalmente.



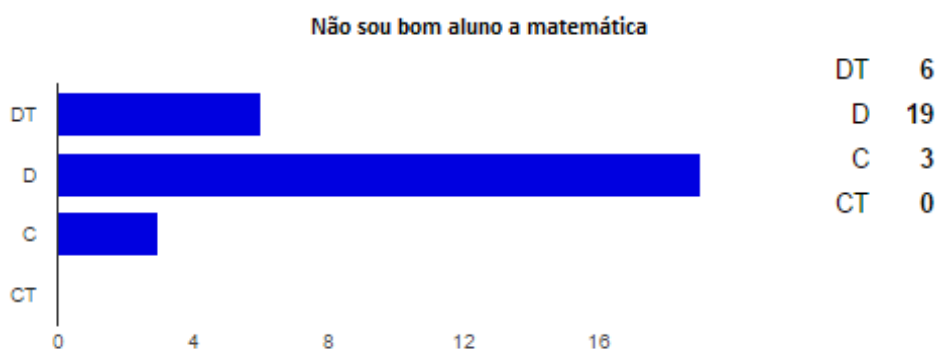
**Figura 6** – Frequência absoluta da variável “a matemática não é importante para a minha formação”

Em relação à afirmação “*tenho apetência para a matemática*”, nenhum aluno assinalou discordo totalmente, 5 discordo, 20 concordo e 3 concordo totalmente.



**Figura 7** – Frequência absoluta da variável “Tenho apetência para a matemática”

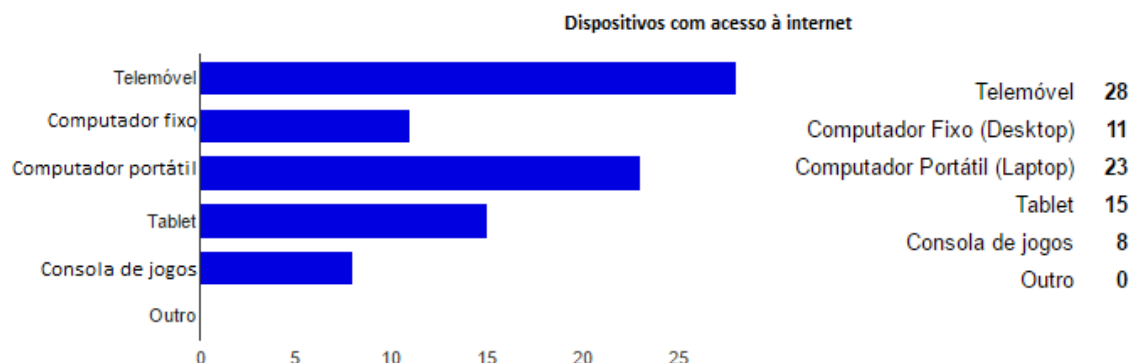
Por fim, relativamente à afirmação “*não sou bom aluno a matemática*” 6 alunos assinalaram discordar totalmente, 19 discordar e 3 concordar.



**Figura 8** – Frequência absoluta da variável “não sou bom aluno a matemática”

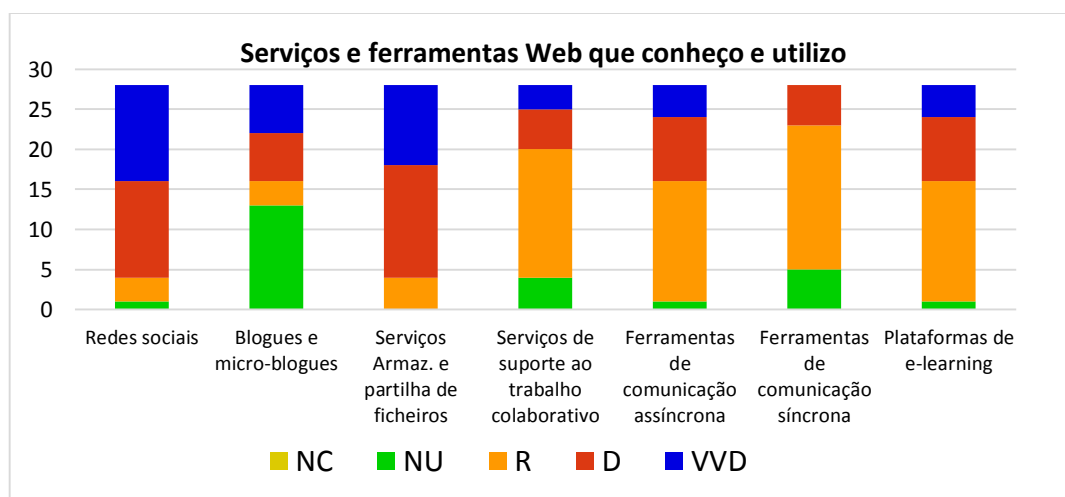
Na parte do questionário inicial que respeita à utilização de equipamentos tecnológicos com acesso à *Internet*, pode-se constatar que os 28 alunos assinalaram possuir telemóvel,

11 computador fixo, 23 computador portátil, 15 dispunha de *tablet* e 8 de consola de jogos.



**Figura 9** – Frequência absoluta da variável “que dispositivos dispões com acesso à *Internet*”

A figura seguinte mostra as respostas que os alunos assinalaram em relação ao conhecimento e utilização dos serviços e ferramentas *Web*. Como se pode verificar, nenhum aluno assinalou não conhecer as opções apresentadas.

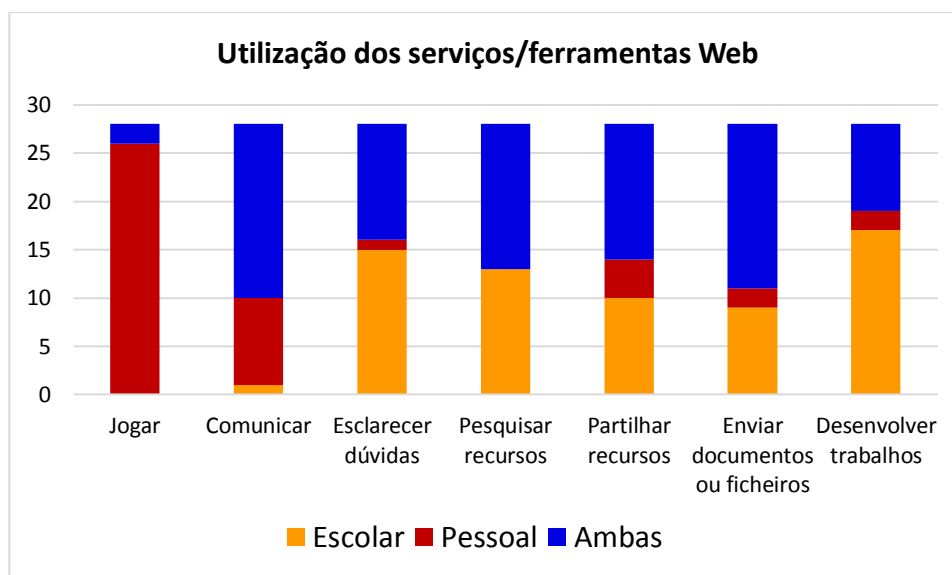


**Figura 10** – Frequência absoluta da variável “serviços e ferramentas *Web* que conhece e utiliza”

As redes sociais foram as que tiveram maior número de respostas “várias vezes ao dia” e, apenas um aluno, assinalou que não as utilizava. Os *blogues* e *micro-blogues* são utilizados pela maioria dos alunos. Os alunos assinalaram utilizar também serviços de armazenamento e partilha de dados, contrariamente ao que acontece com os serviços de trabalho colaborativo, que assinalaram utilizar raramente. As ferramentas de comunicação assíncrona foram assinaladas como utilizadas apenas por 1 aluno, raramente por 15 e com regularidade (diariamente ou várias vezes ao dia) pelos restantes 12 alunos. Já as ferramentas de comunicação síncrona foram assinaladas como utilizadas por 15

alunos e utilizadas com regularidade pelos restantes. Por fim, as plataformas *e-learning* foram assinaladas como nunca utilizadas por apenas 1 aluno, 15 assinalaram utilizar raramente, 8 diariamente e 4 várias vezes ao dia.

Já no que respeita ao uso que os alunos mencionaram fazer dos serviços e ferramentas *Web*, apenas 2 reponderam que utilizam tanto para questões de âmbito escolar como pessoal os jogos e os restantes assinalaram utilizar apenas para proveito pessoal. Quando se apresentou a opção “comunicar”, a maior parte dos alunos (18) assinalou utilizar para ambas as questões/assuntos. Para “esclarecer dúvidas”, 15 assinalaram questões de âmbito escolar, apenas 1 assinalou âmbito pessoal e os restantes informaram utilizar para os dois âmbitos. No que refere à pesquisa e partilha de recursos, envio de documentos ou ficheiros e desenvolvimento de trabalhos, a maioria dos alunos assinalou utilizar os serviços ou ferramentas *Web* para questões dos dois âmbitos – pessoal e profissional.



**Figura 11** – Frequência absoluta da variável “para que usas serviços e ferramentas *Web*”

### 2.2.1. Os casos

Como já se teve oportunidade de referir anteriormente, quando se realiza um estudo de caso não se pretende obter uma generalização para a população. Portanto, selecionam-se casos particulares e efetua-se uma análise do trabalho desenvolvido por estes.

É importante realçar que o principal objetivo é compreender cada caso específico pois, como Stake (2012) afirma, existem poucas probabilidades de os selecionados serem fortemente representativos dos outros.

Posto isto, coloca-se a questão de que casos seleccionar no contexto deste estudo. Stake (2012) menciona que os casos que se seleccionam devem proporcionar o máximo de entendimento e aprendizagens já que se pretende entendê-los o mais em profundidade possível. Deste modo, os casos característicos ou exemplares da turma são boas escolhas, assim como os que diferem do habitual e que ilustram alguns problemas que o investigador deixou passar (Stake, 2012).

Devido à reduzida dimensão do estudo, começou-se por eliminar os participantes que não responderam a algum dos questionários ou não realizaram algumas das tarefas. Os dados recolhidos não foram muitos e, ao faltar algum deles, podia-se comprometer a compreensão dos casos. De entre os alunos que não foram eliminados, escolheram-se quatro para ser os casos deste estudo. Esta seleção atendeu ao desempenho que os alunos tiveram ao longo do estudo, ao interesse demonstrado e ainda às respostas às tarefas e aos questionários.

Foi uma decisão difícil e com bastante ponderação pois a escolha destes casos, como refere (Stake, 2012), poderá “*alargar ou restringir as nossas aprendizagens*”. Procurou-se, então, escolher casos com os quais se considera ter maior possibilidade de retirar aprendizagens.

É importante referir que os nomes atribuídos aos casos são fictícios pois foi garantido o anonimato, quer aos alunos em questão quer aos encarregados de educação, aquando do pedido de autorização para a participação neste estudo.

### **2.3. A professora**

A professora, que assumiu também o papel de investigadora, é do sexo feminino, tinha à data do estudo 26 anos e é licenciada em Matemática pela Universidade de Aveiro.

No âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, assistiu, planificou e implementou aulas em duas turmas do ensino secundário – 10.º e 11.º anos de escolaridade – e ainda teve oportunidade de intervir numa turma do 3.º CEB – 8.º ano. O facto de esta não ser titular da turma, trouxe alguns constrangimentos ao estudo que, mais tarde, serão expostos.



Além da concretização do presente Relatório de Estágio, elaborou um Portfólio Reflexivo com o objetivo de relatar e refletir sobre todo o trabalho desenvolvido durante o período da Prática de Ensino Supervisionada.

### **3. Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados**

Os dados, que segundo Bogdan e Biklen (1994) são *“os materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar[,] são os elementos que formam a base de análise”* (p.149). Dada a natureza da investigação, os dados recolhidos são essencialmente qualitativos.

A recolha documental, a inquirição e a observação são as técnicas de recolha de dados identificadas como sendo as principais num estudo de caso de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011). O cruzamento entre as várias fontes de dados, que a literatura denomina por triangulação, permite obter várias avaliações sobre o mesmo facto, permitindo assim aumentar a credibilidade e validar os resultados obtidos (Bogdan & Biklen, 1994; Yin, 2001; Coutinho & Chaves, 2002).

Neste estudo, utilizaram-se as três técnicas de recolha de dados referidas anteriormente. De seguida, descrevem-se os instrumentos de recolha de dados utilizados relativos a cada uma das técnicas aplicadas.

#### **3.1. Recolha documental**

A recolha de documentos é uma técnica indispensável em qualquer investigação que permite obter informações com vista à atribuição de sentido ao que se apresenta. Neste trabalho, utilizaram-se principalmente produções escritas dos alunos.

Para a elaboração deste trabalho, foram recolhidas as resoluções dos alunos às tarefas realizadas num momento prévio e extra-aula. No início de cada uma das aulas, os alunos entregaram as respetivas resoluções. Houve também uma tarefa que os alunos resolveram na aula para entrega no final de cada sessão. Por forma a que a referência a ambas as tarefas se torne mais simples, a partir deste instante, as tarefas resolvidas num momento prévio e extra-aula terão a designação de tarefas extra-aula e as recolhidas no fim de cada aula serão referidas como questões de aula.

Todos estes documentos permitiram obter dados principalmente acerca da construção e, secundariamente, aplicação de conhecimentos e ainda sobre as competências de autonomia que os alunos revelam.

### **3.2. Inquirição**

A inquirição é uma técnica utilizada quando se pretende obter conhecimento sobre algo (Bogdan & Biklen, 1994; Quivy & Campenhoudt, 2005), podendo assumir duas formas: a escrita – utilizando questionários, por exemplo – e a oral – utilizando entrevistas, por exemplo.

O questionário é um instrumento de recolha de informação em que se apresenta, por escrito, um conjunto de perguntas com o intuito de conhecer qualquer coisa que interesse ao investigador (Quivy & Campenhoudt, 2005). No decorrer do estudo, aplicaram-se dois questionários em momentos diferentes.

Num momento inicial do estudo, foi aplicado um questionário *online* (Apêndice 1), adaptado de (Araújo, 2014), que estava estruturado de forma tripartida com o intuito de atingir objetivos distintos.

Com a parte I do QI, pretendeu-se obter uma caracterização dos participantes, identificar se a disciplina fazia parte das preferências dos alunos e ainda perceber se os alunos realizavam um estudo em pares.

Com a parte II, visava-se identificar quais as tecnologias que os alunos teriam ao dispor e perceber se as utilizavam para questões/assuntos de âmbito escolar, pessoal ou para ambos.

Com a última parte, parte III, pretendeu-se conhecer a opinião dos alunos acerca da antecipação do estudo de tópicos matemáticos e perceber se se consideravam autónomos.

O segundo questionário (Apêndice 2) foi aplicado no final do estudo empírico. Encontrase dividido em duas partes. A primeira visava obter a opinião dos alunos acerca da influência que as tarefas extra-aula tiveram na construção de conhecimento e respetiva aplicação e, ainda, no desenvolvimento de competências de autonomia.

A segunda parte, relativa à autonomia, era exatamente igual à parte III do questionário inicial. Tinha como objetivo poder comparar as respostas com as dadas no questionário

inicial por forma a tentar perceber se as tarefas contribuíram para o desenvolvimento de competências de autonomia.

A partir deste momento, para se referir o questionário inicial utilizar-se-á a sigla QI e, o mesmo para o questionário final que se referenciará por QF.

### **3.3. Observação**

A observação foi uma das técnicas utilizadas neste estudo e fundamental para recolher evidências que permitam compreender melhor cada um dos casos. Coutinho (2011) considera que se observa “*com o objetivo de compreender melhor o fenómeno em estudo*” (p. 290).

O registo das observações foi realizado pela investigadora e pelos participantes indiretos que foram referidos anteriormente. Tentou-se tomar notas o mais realistas possível dos acontecimentos para, numa fase posterior, registar essas observações mais detalhadamente num diário de bordo.

Durante a fase de recolha de dados, foi necessário registar tudo o que se considerou relevante para o estudo: comentários, dúvidas, dificuldades. A oportunidade de ter tido outras pessoas a observar algumas das aulas tornou possível recolher notas de campo que a professora/investigadora não teria tido oportunidade de recolher. Bogdan e Biklen (1994, p. 150) definem notas de campo como sendo “*o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha*”.

Posteriormente, a investigadora organizou as notas de campo de forma mais detalhada e organizada possível constituindo, assim, um diário de bordo. É uma fonte de dados recolhidos o mais fiéis possível e, segundo (Coutinho, 2011), constitui o documento onde são registadas as notas de campo que foram sendo retiradas ao longo do estudo.

## **4. Descrição do Estudo**

Este ponto tem como principal objetivo descrever as várias etapas do estudo. O estudo insere-se no âmbito da unidade curricular Prática de Ensino Supervisionada, que decorreu entre setembro de 2015 e junho de 2016, e divide-se em três grandes etapas: (1)

identificação da temática e planeamento do estudo; (2) implementação do estudo empírico e recolha de dados e (3) análise dos dados.

Na primeira, identificou-se a temática a investigar e planeou-se a forma como o estudo iria decorrer. Começou-se por analisar o estado da arte, com o intuito de obter informação relevante ao estudo e que sustentasse a planificação da sequência das três aulas e a construção dos instrumentos de recolha de dados.

Atendendo aos objetivos de investigação, as aulas foram planificadas de forma diferente do comum. Contrariamente ao que é considerado habitual, os alunos, num momento prévio e extra-aula, teriam contato com o tópico matemático, através da resolução das tarefas extra-aula (Apêndices 3, 4 e 5). Posteriormente, o tópico matemático em causa seria abordado em aula (Apêndices 6, 7, 8).

O processo de construção das tarefas e planificação das aulas nem sempre foi fácil. Sempre que possível, tentou-se contextualizar todas as atividades dada a forte aplicabilidade da matemática nos diversos campos, sejam eles o cotidiano, a engenharia, a medicina, o desporto, a natureza, ou outros. Ponte e Quaresma (2012) afirmam que esta ciência “*permeia a nossa vida diária em coisas tão banais como fazer uma pesquisa no computador, fazer uma compra numa loja ou ver as horas*” (p. 198). Além disso, o tópico trabalhado foi um tópico inicial que não deixa muito espaço para variar o tipo de funções propostas e os exemplos da sua aplicabilidade. No momento da implementação destas aulas, as únicas funções que os alunos conheciam eram as que tinham estudado no 9.º ano de escolaridade. Deste modo, propor tarefas que não caíssem no rotineiro tornou-se um desafio.

Para resolver as tarefas extra-aula, era necessário consultar *sites* por forma recolher dados ou mesmo a contactar com os conteúdos em causa. Por vezes, eram ainda sugeridos videogramas sobre os tópicos em estudo.

As aulas, de uma forma geral, foram divididas em três partes. Num primeiro momento, pretendia-se discutir com toda a turma as tarefas extra-aula e, sempre que se mostrasse oportuno, fazer-se a correção de algumas das respetivas questões no quadro. Depois, com a ajuda dos alunos, formalizavam-se alguns conceitos – definições, notações – e resolviam-se tarefas relacionadas com o assunto estudado num momento prévio e extra-aula. Por fim, num último momento, os alunos resolviam individualmente uma tarefa – a

questão-aula – e entregavam-na à professora. É de referir que, com exceção da primeira aula, a questão-aula era resolvida sempre no início de cada sessão seguinte.

Embora tenha sido este o plano delineado, nem sempre foi possível cumpri-lo na íntegra. Um dos impedimentos prende-se com a não realização das tarefas extra-aula pelos alunos. A primeira tarefa extra-aula não foi realizada na sua totalidade por nenhum aluno e apenas duas alunas a iniciaram. Para justificar este acontecimento, a autora encontra dois motivos: o primeiro prende-se com o fato de os alunos estarem sobrecarregados de trabalhos e testes no momento de implementação das aulas; o segundo deve-se ao fato de não estarem habituados a este método de trabalho. É normal, que ao início se encontre alguma resistência (Tucker, 2012).

É importante que os professores que optam por esta estratégia prevejam o que fazer no caso de os alunos não terem realizado em casa as tarefas que antecipam os conteúdos. Na primeira aula desta sequência, a autora não tinha pensado muito nesta questão, pois considerou que os alunos iam ter noção da importância das tarefas e iam resolvê-las. As tarefas foram realizadas com o recurso a tecnologias o que, pensava a autora, ser uma fonte de motivação. No entanto estava errada. Barbosa, Barcelos e Batista (2015) afirmam que a maioria dos alunos não utiliza as tecnologias a favor da aprendizagem fazendo-o apenas para outros benefícios pessoais. Segundo a análise que se fez, parece que esta situação se confirma neste pequeno grupo de alunos. A verdade é que, como nenhum aluno resolveu a tarefa extra-aula, na primeira sessão estiveram todos a realizá-la durante o início da mesma. Mas e se alguns a tivesse feito, o que fariam durante o tempo em que os colegas a resolviam? Devia ter sido prevista esta situação no plano de aula e definido que atividades propor a esses alunos durante esse período de tempo.

Na segunda aula, não houve grandes desvios ao plano já que os alunos, na sua grande maioria, resolveram a tarefa extra-aula proposta.

A terceira aula foi um pouco mais monótona que as anteriores pois os alunos estavam apáticos, não responderam às questões que a professora fez nem participaram da mesma forma que faziam nas aulas anteriores. O motivo para tal pode-se prender com o fato de alguns terem regressado de uma viagem na noite anterior, o que fez com que tivessem dormido pouco nesse dia e, por isso, estivessem cansados.

Na primeira etapa do estudo, foram ainda elaborados dois questionários para aplicar num momento inicial e outro no final do mesmo.

Como os alunos envolvidos eram menores de idade, foi ainda necessário realizar um pedido de autorização por escrito aos encarregados de educação (Apêndice 9) com o intuito de solicitar permissão para recolher as produções escritas dos alunos e as respostas aos questionários.

Durante a segunda etapa, foram aplicados os questionários e implementadas as aulas planificadas. Foi nesta altura que se recolheram os dados necessários à elaboração deste estudo.

Esta fase decorreu entre 8 de março e 4 de abril de 2016. No quadro seguinte, sintetizam-se as datas, aulas e tarefas realizadas.

Datas	Atividades
8 a 11 de março	<ul style="list-style-type: none"><li>Solicitação do preenchimento do Questionário Inicial</li></ul>
14 de março	<ul style="list-style-type: none"><li>Entrega da tarefa para realizar num momento prévio e extra-aula sobre funções injetivas e sobrejetivas (“A emissão de CO<sub>2</sub>”)</li></ul>
15 de março	<ul style="list-style-type: none"><li><u>Aula sobre funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas</u></li><li>Entrega da tarefa para realizar num momento prévio e extra-aula sobre funções injetivas e sobrejetivas sobre função composta (“A matemática pensa em tudo”)</li></ul>
17 de março	<ul style="list-style-type: none"><li><u>Aula sobre função composta</u></li><li>Entrega da tarefa para realizar num momento prévio e extra-aula sobre função inversa (“Os mesmos dados, duas funções”)</li></ul>
4 de abril	<ul style="list-style-type: none"><li><u>Aula sobre função inversa</u></li><li>Aplicação do Questionário Final</li></ul>

**Quadro 2** – Atividades desenvolvidas durante a sequência didática

Num momento inicial do estudo empírico, foi aplicado um questionário disponibilizado *online*. Não foi fácil obter as respostas de todos os alunos pelo que, posteriormente, se

teve de aplicar, aos alunos em falta, o questionário em formato papel, pois era importante obter a caracterização dos participantes.

Por fim, aplicou-se o questionário final. Devido à dificuldade em obter as respostas ao primeiro questionário, este foi aplicado em formato papel na última aula da sequência planificada.

Todo este procedimento, bem como os objetivos e importância do estudo empírico, foi devidamente explicitado aos alunos antes do início do mesmo.

A terceira e última etapa do estudo corresponde à análise dos dados recolhidos e à conclusão da produção escrita do presente relatório.

## **5. Apresentação e discussão dos resultados**

Neste ponto, será descrita a forma como os dados recolhidos através dos diversos instrumentos foram analisados e tratados e ainda como serão apresentados os respetivos resultados.

Os dados de natureza quantitativa foram alvo de uma estatística descritiva simples. Por outro lado, os dados de natureza qualitativa recolhidos foram alvo de análise de conteúdo, orientada por categorias que decorrem das questões e dos objetivos que o estudo persegue:

- construção de conhecimento relativo a generalidades sobre funções – em particular, conhecimento relativo a funções injetivas e sobrejetivas, função composta e função inversa – e aplicação desse conhecimento na resolução de tarefas variadas.
- autonomia – (a) possibilidade de construção autónoma de conhecimento; (b) estratégias usadas para o desenvolvimento de autonomia e (c) influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática.

Os resultados serão apresentados de forma descritiva e, quando possível, tenta-se uma sua interpretação. Procura-se evidenciar as afirmações feitas trazendo digitalizações e/ou transcrições de produções dos alunos (tarefas extra-aula e questões de aula), do diário da investigadora e das respostas dos alunos aos questionários.

## IV. Apresentação e Discussão de Resultados

Este capítulo é dedicado à apresentação e discussão de resultados obtidos a partir do tratamento e análise dos dados recolhidos através dos diversos instrumentos já referidos anteriormente.

Para cada um dos casos, começa-se por fazer uma breve caracterização. Posto isto, explicita-se como foram evoluindo relativamente à construção de conhecimento sobre generalidades sobre funções e sua aplicação na resolução de tarefas variadas. Finalmente, apresentam-se e discutem-se os resultados relativamente à autonomia nas três dimensões consideradas: (a) possibilidade de construção autónoma de conhecimento, (b) estratégias usadas nesse processo e (c) influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática.

### 1. Jaime

O Jaime era um aluno que, no momento do estudo, tinha 15 anos. A investigadora pôde observar que, durante as aulas, era um aluno participativo. Essa participação foi notória no trabalho que desenvolvia e nas questões que colocava no desenrolar da aula. Era uma frequência assídua nas sessões destinadas ao apoio ao estudo.

No QI (Apêndice 1), englobou a matemática nas suas disciplinas favoritas e confirmou gostar de matemática, apesar de a considerar difícil. Assinalou gostar de resolver tarefas matemáticas e de realizar desafios/jogos matemáticos. Assinalou discordar completamente quando confrontado com a afirmação “*a matemática não é importante para a minha formação*”. Considerou ainda ter apetência para a matemática e assinalou discordar do facto de não ser bom aluno a matemática.

Em relação às tecnologias, no QI mencionou possuir acesso à *Internet* através do telemóvel, do computador portátil e da consola de jogos. Em relação aos serviços e ferramentas *Web*, assinalou utilizar diariamente serviços para armazenamento e partilha de ficheiros. Relativamente aos restantes, assinalou que não utilizava, como é o caso de redes sociais e *blogues* e *micro-blogues*, ou utilizava raramente, como é o caso de serviços de suporte ao trabalho colaborativo, ferramentas de comunicação assíncrona e síncrona e ainda plataformas de *e-learning*.



Quando no QI foi questionado acerca do uso que fazia dos serviços e ferramentas *Web*, o Jaime considerou utilizá-los tanto para questões de âmbito pessoal como escolar, à exceção dos jogos e esclarecimento de dúvidas que apenas referiu utilizar para proveito pessoal.

### 1.1 Construção e aplicação de conhecimento

O Jaime parece ter tido alguma dificuldade em resolver a primeira tarefa extra-aula intitulada “A emissão de CO<sub>2</sub>” (Apêndice 3), pois não respondeu às questões 3, 4.b) e 4.c) e só iniciou a 2.

Relativamente à questão 2, a resposta apresentada, além de incompleta, está incorreta. Atendendo aos dados que o aluno apresentou na questão 1 (e que se podem ver na figura seguinte) conclui-se facilmente que se está perante uma função não injetiva já que os países Etiópia e Portugal apresentam a mesma quantidade de emissão de CO<sub>2</sub> – 0 toneladas.

Pais	Emissão de CO <sub>2</sub> (toneladas)
USA	28
Bélgica	14
China	31
Brasil	2
Etiópia	0
Venezuela	1
Austrália	3
Portugal	0

Figura 12 – Resolução da questão 1 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1

No entanto, o aluno respondeu que a função é injetiva (como se pode constatar na figura seguinte).

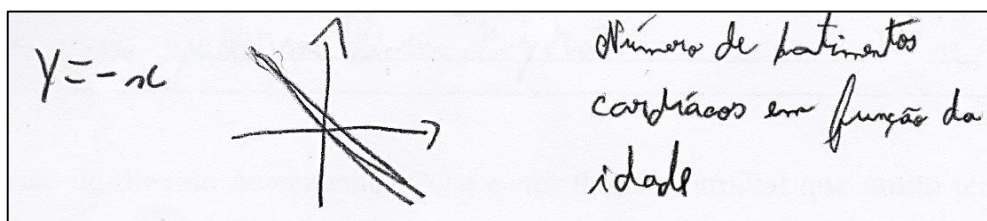
Injetiva porque a países diferentes correspondem diferentes valores de emissão (variável qualitativa)

Figura 13 – Resolução da questão 2 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1

O aluno teve ainda o cuidado de classificar as variáveis envolvidas em qualitativas e quantitativas, algo irrelevante para a questão em causa. Quanto à sobrejetividade, não se obteve qualquer referência por parte do aluno.

Como o Jaime considerou que a função era injetiva, era esperado que respondesse à questão 3, o que não sucedeu.

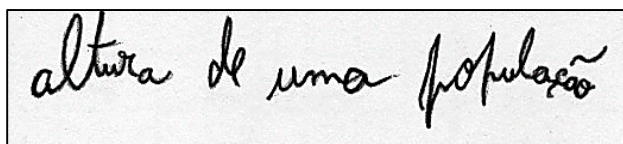
Em relação à questão 4, o aluno respondeu à alínea a) e d). Na primeira, o aluno começou por apresentar, corretamente, o exemplo de uma expressão analítica e respetiva representação gráfica de uma função (como se pode ver pela imagem seguinte).



**Figura 14** – Resolução da questão 4.a) apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1

O exemplo da vida real que o aluno apresentou é que suscita algumas dúvidas. Em primeiro lugar, apresenta idades e batimentos cardíacos negativos, o que não é realista. Depois, começando pela injetividade, defende-se que o número de batimentos cardíacos diminui em função da idade. No entanto, para idades diferentes, embora próximas, o número de batimentos cardíacos esperados pode ser o mesmo. Segunda esta última visão, a função mencionada não é injetiva. Em relação à sobrejetividade, como o aluno não mencionou o conjunto de chegada da função, considera-se que este integra todos os valores possíveis. Deste modo, a função não é sobrejetiva.

No que respeita à alínea d) o aluno, tal como solicitado na questão, apresentou um exemplo da vida real (como se pode ver na figura seguinte).



**Figura 15** - Resposta à questão 4.d) apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 1

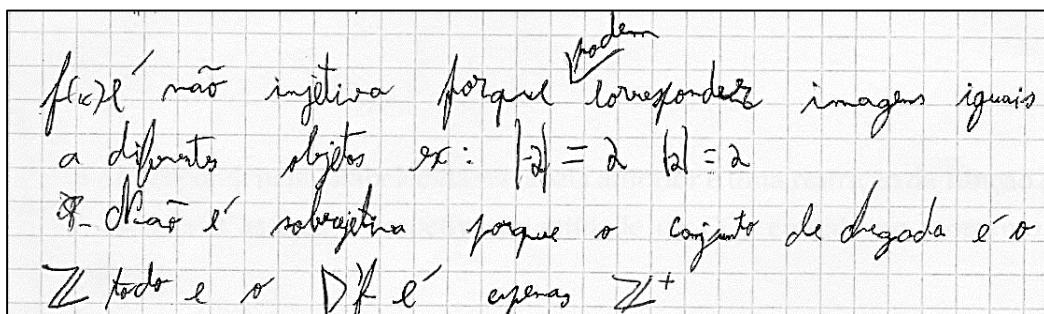
Quanto ao facto de a função ser não injetiva, a resposta está correta. O mesmo não se pode dizer relativamente à sobrejetividade pois, na realidade, não existe alguém que meça, por exemplo, 10 metros de altura. Sendo assim, a função que o aluno mencionou não é sobrejetiva.

A análise da resolução da tarefa “A emissão de CO<sub>2</sub>” parece evidenciar que o aluno teve algumas dificuldades em compreender, numa primeira abordagem, o conceito de injetividade e sobrejetividade. No entanto, aquando da correção da referida tarefa, em aula, o aluno apresentou uma resposta correta à questão 2.

De facto, já em aula, no decorrer da correção da primeira tarefa extra-aula, o aluno afirmou que esta função “*não é injetiva porque vários objetos têm a mesma imagem*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016). Apesar da resposta errada e incompleta apresentada na resolução da sua tarefa, o aluno, mais tarde, apercebeu-se e apresentou oralmente uma resposta mais adequada. Ainda na aula, indicou que a função não era sobrejetiva, embora não tenha proferido qualquer justificação.

Na caracterização já se tinha mencionado que o Jaime era muito participativo, mas, como era um aluno que se encontrava próximo do espaço que a professora maioritariamente ocupou no decorrer da sessão, pareceu que interveio e participou mais nesta aula, demonstrando algum interesse pela mesma.

Relativamente à questão de aula recolhida no final da sessão do dia 15 de março (Apêndice 6), o Jaime parece mostrar que as dificuldades encontradas inicialmente foram dissipadas no decorrer da mesma. Relativamente à função  $f$ , o aluno classificou e justificou corretamente as funções em relação à injetividade e sobrejetividade. Como se pode ver na figura seguinte, esqueceu-se, apenas, de indicar se a função é, ou não, bijetiva.

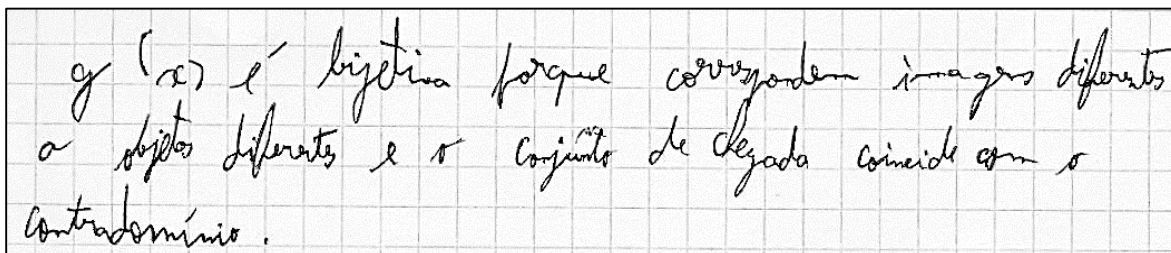


**Figura 16** – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função  $f$

É possível reparar que o aluno apresenta um erro de linguagem. Refere que “ $f(x)$  não é injetiva” em vez de referir que a função  $f$  não é injetiva. Como se terá a oportunidade de reparar, o aluno comete este erro também em tarefas seguintes.

Em relação à função  $g$ , verifica-se que o aluno classificou corretamente a função  $g$  quanto à bijetividade. Apesar de não existir, de forma direta, referência à injetividade e

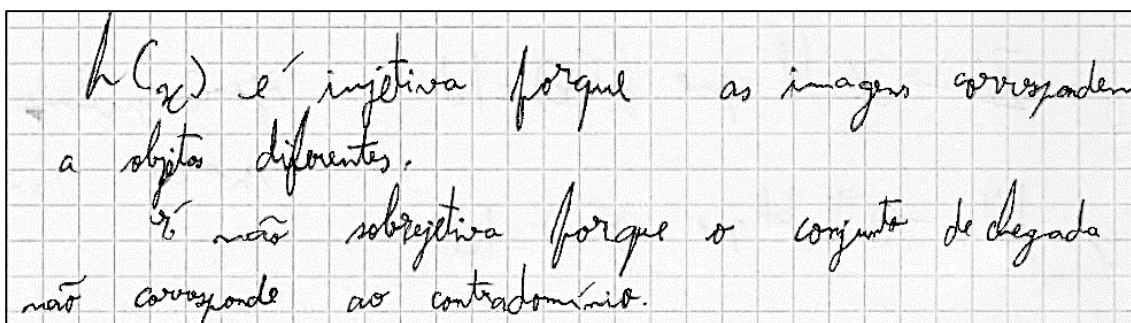
sobrejetividade da função, o aluno apresentou, embora incompletas, justificações adequadas a esta situação (como se pode verificar na figura seguinte).



$g(x)$  é bijetiva porque correspondem imagens diferentes a objetos diferentes e o conjunto de chegada coincide com o contradomínio.

**Figura 17** – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função  $g$

Por fim, o aluno (como se pode ver na figura seguinte) classificou a função  $h$  corretamente quanto à injetividade e sobrejetividade, embora apresentando justificações muito incipientes. Mais uma vez, não houve qualquer referência à bijetividade da função em causa.



$h(x)$  é injetiva porque as imagens correspondem a objetos diferentes.  
É não sobrejetiva porque o conjunto de chegada não corresponde ao contradomínio.

**Figura 18** – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 15 de março relativa à função  $h$

Na segunda tarefa extra-aula – “A matemática pensa em tudo” (Apêndice 4) – o Jaime apenas deixou em branco uma das questões. Em relação à questão 1, cuja resposta necessitava da exploração de uma página da *Internet*, o aluno respondeu acertadamente escrevendo: “Eu durmo todos os dias”.

Pela figura seguinte, pode-se verificar que a resposta apresentada à questão 2 é confusa.

$P: y = 9x + b$   
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 $n^\circ$  de pag  $tempo$   
 conjunto de chegada =  $n^\circ$  de pag  
 Domínio =  $tempo$

$C: y = 1,5x + b$   
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 $n^\circ$  de pag  $tempo$   
 conjunto de chegada: custo total dos pag.  
 Domínio =  $n^\circ$  de pag

Figura 19 – Resposta à questão 2 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2

Em relação a ambas as funções, o aluno acrescentou uma incógnita  $b$  cujo significado não se percebe. Relativamente aos domínios e contradomínios de cada uma das funções, o aluno não os definiu, tendo identificado apenas a variável correspondente a cada um deles.

Devido ao facto de o aluno ter utilizado as funções definidas de forma errada na questão anterior, a 3 também não está correta (como se pode verificar na figura seguinte).

$P: y = 9x + b$   
 $y = 9 \times 360 + b$   
 $y = 3240 + b$

$C: y = 1,5x + b$   
 $x + 3240 = 1,5x + b$   
 $1,5 \quad 1,5$   
 $x = 2160$

Figura 20 – Resposta à questão 3 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2

Mais uma vez, a resposta à questão 4 começou por ser um pouco confusa. Mas, no fim, o aluno revela ter percebido o que representa a expressão apresentada, tendo referido que “representa o custo total do trabalho” (como se pode verificar na figura seguinte).

A expressão relaciona o do trabalho, com o número de pag, com o tempo. Representa o custo total do trabalho

Figura 21 – Resposta à questão 4 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 2

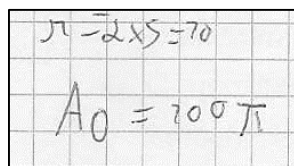
A última questão, em que é solicitada a caracterização de uma função composta, foi a que o aluno deixou em branco. Apesar de ter percebido, na questão anterior, o que representava a expressão, o aluno não foi capaz de determinar quer a expressão quer o domínio e o conjunto de chegada.

Num contacto prévio com o conceito de função composta, o aluno aparenta ter algumas dificuldades. Na aula que se seguiu à realização desta tarefa, durante a correção da questão 5, ouviu-se o aluno dizer “*ah... temos de calcular C de t sobre 9*” (Diário de Bordo, 17 de março de 2016). O aluno parece ter percebido, em aula, o objetivo da questão.

Tal como aconteceu na aula anterior, foi participando e mostrando interesse pelos conteúdos abordados. Tal envolvimento pode ser constatado com a questão “*como fica a função fof e gog*” (Diário de Bordo, 17 de março de 2016).

Na questão de aula do dia 17 de março (Apêndice 7), revela ter ainda algumas dificuldades nas questões que envolviam diretamente a função composta, como se verá de seguida.

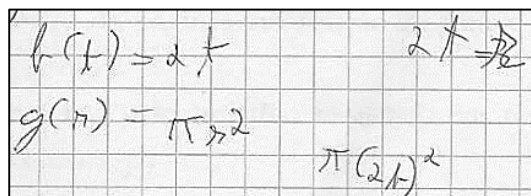
A primeira alínea tem uma dificuldade muito reduzida e o Jaime conseguiu completar as tabelas apresentadas sem erros. O mesmo aconteceu com a segunda – o aluno respondeu sem evidenciar dificuldades (como se pode ver pela figura seguinte).



Handwritten student work on grid paper. The first line shows the calculation  $\pi = 2 \times 5 = 10$ . The second line shows the calculation  $A_0 = 100\pi$ .

**Figura 22** – Resposta do Jaime à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 de março

Na terceira alínea, pretendia-se que o aluno utilizasse os conhecimentos de função composta e calculasse a área desejada. Como se pode constatar na figura seguinte, o Jaime utilizou a função composta embora não o tenha feito de forma direta e explícita. O raciocínio presente na resolução está correto, embora tenha apresentado uma pequena dificuldade em utilizar a notação mais adequada.

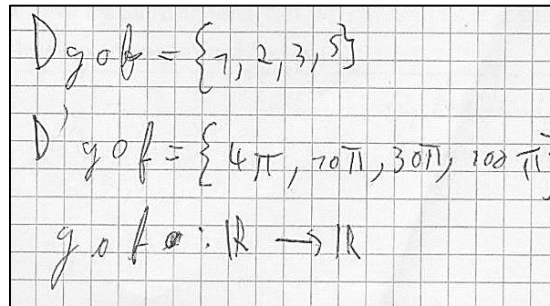


Handwritten student work on grid paper. The first line shows the function definition  $f(t) = 2t$ . The second line shows the function definition  $g(\pi) = \pi \times 2$ . To the right, there are two calculations:  $2t = \frac{2}{2}$  and  $\pi(2t)^2$ .

**Figura 23** – Resposta do Jaime à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 de março

Por fim, tal como se pode verificar na figura seguinte, o aluno não apresentou a expressão da função composta. Talvez tenha acontecido por esquecimento, já que a indicou na alínea

anterior. Relativamente ao domínio, o aluno conseguiu defini-lo de forma correta. Já o contradomínio não está correto.



$$D_{g \circ f} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$D'_{g \circ f} = \{4\pi, 70\pi, 30\pi, 100\pi\}$$

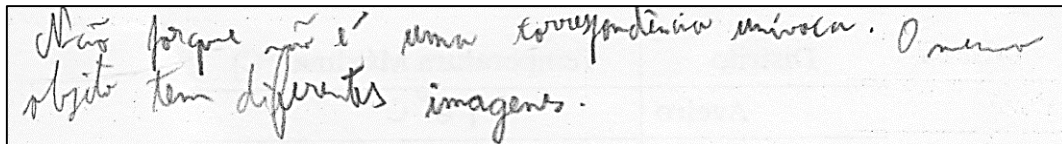
$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Figura 24** – Resposta do Jaime à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 de março

O aluno parece mostrar ainda dificuldades na utilização da notação inerente à função composta e ainda na determinação do contradomínio.

A terceira e última tarefa extra-aula – “Os mesmos dados, duas funções” (Apêndice 5) – foi resolvida na íntegra pelo Jaime, embora apresente incorreções. O aluno preencheu a tabela inicial e estabeleceu a correspondência inversa de forma correta.

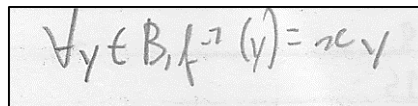
Na questão 3, o aluno respondeu de forma correta, tal como se pode ver na figura seguinte. Apercebeu-se que a correspondência estabelecida na questão 2 não poderia ser uma função uma vez que alguns objetos possuíam mais do que uma imagem.



Não porque não é uma correspondência unívoca. O mesmo objeto tem diferentes imagens.

**Figura 25** – Resposta à questão 3 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3

Na questão seguinte, o aluno apresentou uma resposta desadequada à situação, tal como se pode constatar na figura seguinte.



$$\forall y \in B, f^{-1}(y) = x y$$

**Figura 26** – Resposta à questão 4 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3

O aluno não percebeu o que se pretendia e apresentou, embora de forma incompleta, a definição de função inversa com a qual, até então, não tinha tido um contato formal. Talvez tenha ido à procura de informação em outros locais e, ao deparar-se com esta condição, pareceu-lhe adequada à questão em causa.



Mais uma vez, na questão 6, o aluno estabeleceu corretamente a correspondência inversa e, como se pode ver pela figura seguinte, conseguiu também justificar o motivo pelo qual a correspondência não é uma função.

**Figura 27** – Resposta à questão 7 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3

No entanto, na questão 8, mais uma vez, não conseguiu identificar a condição a impor à função inicial para que a sua correspondência inversa seja também função. Apresentou, como se pode ver na figura seguinte, algo muito parecido com o que se pode constatar na resolução da questão 4.

**Figura 28** - Resposta à questão 8 apresentada pelo Jaime na tarefa extra-aula 3

Com a resolução desta atividade, o aluno não conseguiu identificar, num momento inicial, as condições necessárias para que uma função possua inversa – ser injetiva e sobrejetiva – tendo conseguido apenas identificar os motivos pelos quais as correspondências apresentadas não são funções.

Já na sessão em que se realizou a correção da tarefa, o aluno foi um dos que respondeu oralmente à questão 4, dizendo que “a função inicial tem de ser injetiva” (Diário de Bordo, 4 de abril de 2016) para que a sua correspondência inversa fosse, também ela, uma função.

Talvez devido ao cansaço que sentia, nesta aula o aluno não foi muito participativo e interveio pouco. Recorde-se que os alunos tinham dormido pouco devido ao facto de terem chegado de uma viagem na respetiva madrugada.

Na questão-aula do dia 4 de abril (Apêndice 8), relativamente à função  $f$ , o aluno respondeu de forma exemplar, referindo e justificando a não existência de função inversa. Tal facto pode ser constatado na figura seguinte.



~~$f(x) = x^2$~~   $a, b \in Df$

$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  isto faz com que não seja sobrejetiva nem injetiva; não apresenta inversa

Figura 29 – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $f$

Já em relação à função  $g$ , o aluno deixou apenas por justificar a injetividade da função. No entanto, teve o cuidado de, no decorrer da resolução, mencionar a bijetividade da função e a existência de função inversa. É de salientar que teve também atenção à utilização da notação adequada para mencionar a função inversa. Tal resolução pode ser visionada na figura seguinte.

$c, d \in Dg$   $g$  é bijetiva, logo tem função inversa

C de chegada  $d\mathbb{R} = D'g$   $g^{-1}(y) = x + 5$

$x = x - 5 \Leftrightarrow x = y + 5$

Figura 30 – Resposta do Jaime à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $g$

Face à discussão anterior, o trabalho prévio realizado pelo aluno, num momento extra-aula, contribuiu para a construção de alguns conhecimentos sobre classificação de funções quanto à injetividade e sobrejetividade e função inversa. Esse trabalho talvez não tão bem conseguido no que respeita à função composta – tarefa extra-aula 2 e questão de aula do dia 17 de março.

## 1.2 Autonomia

### (a) Possibilidade de construção autónoma de conhecimento

Recorde-se que o aluno, na primeira tarefa extra-aula, não respondeu às questões 3, 4.b) e 4.c) e apenas iniciou a questão 2. Já na segunda tarefa extra-aula, deixou em branco apenas a questão 5. Por fim, na terceira tarefa extra-aula respondeu a todas as questões apresentadas. Este facto revela que o aluno evoluiu no envolvimento autónomo na resolução das tarefas propostas. No entanto, tal autonomia não foi suficiente para responder corretamente a todas as questões.

No QF (Apêndice 2), como o aluno assinalou que compreendeu o enunciado, não terá respondido a algumas questões e terá errado outras – questão 1 da segunda tarefa extra-aula e questões 4 e 8 da terceira tarefa extra-aula – provavelmente porque não tinha conhecimentos suficientes acerca do assunto tratado e não procurou informação suficiente para dar uma resposta correta. A procura de informação que o ajudasse a responder às questões seria um fator revelador de competências de autonomia. No entanto, tal atitude não aconteceu.

O quadro que se segue sintetiza as respostas que o aluno assinalou, em ambos os questionários, nas afirmações que se referem à dimensão que se está a analisar. A opinião do aluno mantém-se em ambos os momentos.

Afirmações	QI	QF
Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes do tópico ser abordado na escola.	Discordo	Discordo
Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.	Discordo	Discordo

**Quadro 3** – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (a)

Tanto no QI (Apêndice 1) como no QF, o aluno discordou da primeira afirmação apresentada no quadro anterior. Para este aluno, parece não existir muito conhecimento matemático possível de ser construído de forma autónoma pelos alunos. Mas discordou também, nos dois questionários, da afirmação que refere que nunca compreenderia um tópico matemático estudado pelo próprio, sem que fosse explicado pelo professor.

As respostas apresentadas denotam que, curiosamente, o aluno considerou que compreenderia frequentemente um tópico matemático estudado de forma autónoma, mas que só algum conhecimento matemático é possível ser construído de forma mais autónoma.

*(b) Estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia*

Tendo em conta as respostas do aluno aos QI e QF apresentadas no quadro que se segue, nota-se alguma evolução, embora ténue, quanto ao utilizar a estratégia de procurar ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas para tentar esclarecer dúvidas relativamente a conteúdos matemáticos, não esperando que o professor o faça.

Afirmações	QI	QF
Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor esclareça – procuro ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas.	Discordo totalmente	Discordo
Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas <i>Web</i> .	Discordo	Discordo

**Quadro 4** – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (b)

Como se pode constatar no quadro anterior, na primeira afirmação o aluno deixou de assinalar discordo totalmente e passou a assinalar discordo. Relativamente à procura de ajuda nos serviços e ferramentas da *Web*, a posição inicial não era tão radical, mas mantém-se no QF – discordo.

O quadro que se segue apresenta as respostas do Jaime às afirmações sobre as tarefas extra-aula realizadas.

Afirmações	QF
Enquanto realizava as tarefas senti necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos.	Discordo
Enquanto realizava as tarefas procurei informação em outros sítios que não no guião fornecido pelo professor.	Discordo totalmente

**Quadro 5** – Respostas do Jaime ao QF em relação à dimensão (b)

Como se pode reparar, o aluno discordou da primeira afirmação e discordou totalmente da segunda. Dá a entender que até pode ter sentido alguma necessidade de procurar ajuda para esclarecer dúvidas, no entanto, nunca procurou ajuda em outros locais que não fossem o guião fornecido pelo professor.

Estas respostas denotam que o aluno, além da exploração dos materiais disponibilizados pelo professor, não tirou partido de estratégias que permitissem esclarecer dúvidas e desenvolver a autonomia, embora possa ter ficado um pouco mais aberto a essa possibilidade.

*(c) Influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática*

Quanto à influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática, o quadro que se segue mostra as respostas que o aluno assinalou em ambos os questionários. Assinalou discordar, em ambos os questionários, que a antecipação do estudo permite acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula. Esta resposta parece estranha já que, como se teve oportunidade de ver no subcapítulo anterior, em alguns momentos de correção das tarefas extra-aula, este aluno interveio e corrigiu algumas falhas que tinha revelado nas respostas prévias às mesmas, o que se repercutiu na questão de aula, na qual teve um desempenho positivo, isto é, conseguiu aplicar alguns dos conhecimentos construídos.

Afirmações	QI	QF
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.	Discordo	Discordo
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia.	Concordo	Discordo

**Quadro 6** – Respostas do Jaime aos QI e QF em relação à dimensão (c)

No QI, começou por assinalar concordo quanto ao facto de antecipar o estudo de um tópico matemático permitir desenvolver a autonomia. Por fim, no QF, assinalou discordo, mas o facto é que o aluno, na última tarefa, apresentou resposta a todas as questões, contrariamente ao que aconteceu nas anteriores. Isto parece revelar algum desenvolvimento de competências de autonomia.

No QF, em relação às afirmações relacionadas com as tarefas extra-aula realizadas, as respostas que o Jaime assinalou encontram-se sintetizadas no quadro que se segue.

<b>Afirmações</b>	<b>QF</b>
A resolução de tarefas contribuiu para a construção de conhecimentos em relação aos conteúdos envolvidos.	Concordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior envolvimento na aula.	Concordo
Ter realizado as tarefas facilitou a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma.	Discordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior interesse na aula.	Discordo

**Quadro 7** – Respostas do Jaime ao QF em relação à dimensão (c)

O aluno assinalou concordo na primeira afirmação que se refere ao contributo do trabalho, num momento prévio e extra-aula, na construção de conhecimento. Escolheu também a opção concordo na afirmação que relaciona a realização das tarefas extra-aula com o maior envolvimento na aula. Recorde-se que o aluno foi considerado participativo. Nas sessões destinadas à correção das tarefas extra-aula, como seria de esperar, ele interveio por forma a corrigir algumas falhas que tinha cometido nas respetivas resoluções.

Apesar de ter assinalado concordo nas duas afirmações anteriores, assinalou discordo nas seguintes. Assim, ter realizado as tarefas não terá facilitado a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma nem contribuído para um maior interesse na aula.

Portanto, segundo o aluno, o trabalho que realizou contribuiu para a construção de conhecimento e para um maior envolvimento na aula. Por outro lado, parece não ter facilitado a resolução das tarefas no decorrer da aula nem ter contribuído para um maior interesse, o que contraria a observação direta.

## **2. Rita**

A Rita, no momento do estudo, tinha 15 anos. Durante as aulas, a investigadora pôde reparar que era uma aluna que se envolvia nas tarefas propostas. Frequentava com regularidade as horas destinadas ao apoio e era neste espaço que, maioritariamente, colocava as suas dúvidas.

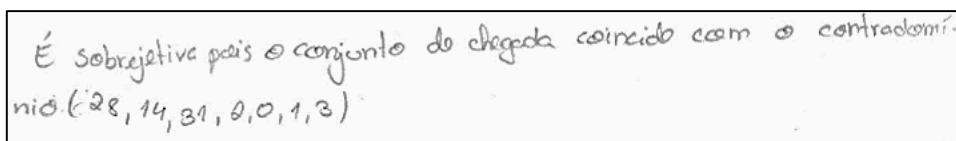
De acordo com os dados recolhidos no QI (Apêndice 1), englobou a matemática nas três disciplinas favoritas e afirmou gostar de resolver tarefas e desafios/jogos matemáticos. Considerou ter apetência para a matemática e ser uma boa aluna nesta disciplina e reconheceu ainda a importância que a matemática tem na sua formação.

Em relação aos dispositivos com tecnologia, no QI mencionou possuir o telemóvel e o computador portátil. Referiu também que utilizava várias vezes ao dia as redes sociais, *blogues* e *micro blogues* e ainda ferramentas de comunicação síncrona. As restantes ferramentas e serviços *Web* apresentados no questionário, apesar de conhecer, utilizava raramente.

Em relação ao uso que faz da *Internet*, no QI referiu ser para proveito pessoal que usava os serviços e ferramentas disponíveis na *Web* para jogar. Por outro lado, para questões de âmbito escolar, assinalou utilizar ferramentas ou serviços que permitam esclarecer dúvidas, pesquisar ou partilhar recursos, enviar documentos ou ficheiros e ainda desenvolver trabalhos. Quando acede à *Internet*, assinalou que a utiliza para questões tanto de âmbito escolar como pessoal.

## 2.1. Construção e aplicação de conhecimentos

A Rita, em relação à tarefa extra-aula intitulada “A emissão de CO<sub>2</sub>” (Apêndice 3), não resolveu a questão 3 e deixou a 2 incompleta. Após ter completado a tabela com os dados fornecidos na aula, relativamente à questão 2 a aluna afirmou, como se pode ver pela figura seguinte, que a função é sobrejetiva.



É sobrejetiva pois o conjunto de chegada coincide com o contradomínio (28, 14, 31, 0, 0, 1, 3)

**Figura 31** – Resolução da questão 2 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1

Sendo o conjunto de chegada todos os valores possíveis de toneladas de emissão de CO<sub>2</sub>, o contradomínio da função definida na questão 1 não coincide com o conjunto de chegada. A aluna não fez qualquer referência em relação à injetividade da função.

O mesmo aconteceu na questão 3, que foi deixada em branco. Esta análise inicial parece evidenciar que a aluna não percebeu o conceito de função injetiva. No entanto, a análise da questão 4 parece mostrar o contrário.

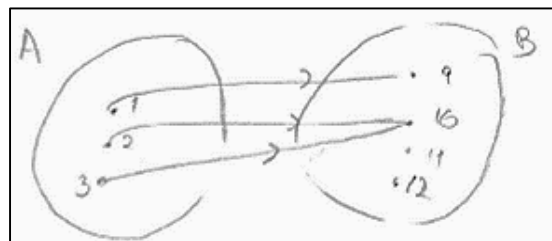
Na alínea a), a aluna apresentou uma função definida por tabela, como se pode ver na figura que se segue.

Energia cinética	velocidade
30	2
40	4
60	6

**Figura 32** – Resolução da questão 4.a) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1

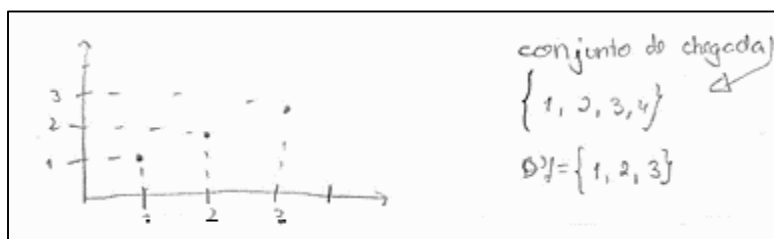
Quanto à injetividade da função, não existem dúvidas. Já em relação à sobrejetividade, não tendo sido definido, de forma clara, o conjunto de chegada, considera-se que este é definido por todos os valores possíveis de velocidade. Portanto, a função apresentada não é sobrejetiva.

Na alínea seguinte, a função apresentada num diagrama de Venn não é, claramente, injetiva. Contrariamente ao solicitado na tarefa, não se trata de uma função sobrejetiva. Como se pode verificar na figura que se segue, não é, também, um exemplo da vida real.



**Figura 33** – Resolução da questão 4.b) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1

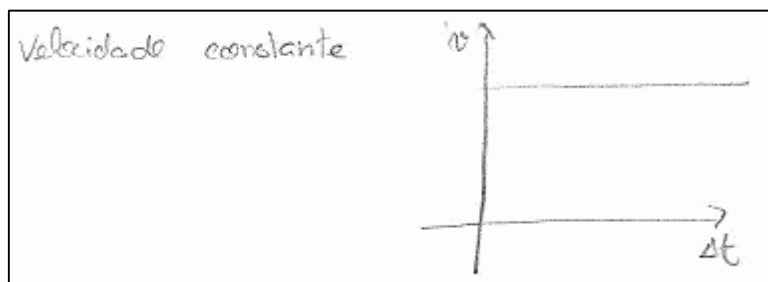
Embora sem estar em contexto de vida real, a função apresentada na alínea c) da questão 4, através da sua representação gráfica está correta, como se pode ver na figura seguinte.



**Figura 34** – Resolução da questão 4.c) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1

Neste exemplo, a aluna teve o cuidado de definir o conjunto de chegada por forma a que este não coincidisse com o contradomínio.

Por fim, na alínea d), apresentou um exemplo da vida real como se pode constatar na figura seguinte.



**Figura 35** – Resolução da questão 4.d) apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 1

Na sessão do dia 15 de março, durante a correção da tarefa extra-aula, a aluna apresentou, no devido momento, o exemplo que considerou na questão 4.b). Quando questionada acerca da sobrejetividade da função corrige dizendo: “*pois, não é sobrejetiva... há números no B que não têm correspondência do A*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016). A aluna, através da definição com que já tinha tido contato num momento prévio, conseguiu emendar o erro cometido aquando da resolução escrita da tarefa.

A Rita, nesta aula, mostrou-se envolvida nas atividades propostas e pareceu estar a acompanhar a aula. Foi participando quando sentia dúvidas.

Na resolução de uma atividade proposta na aula, a Rita conseguiu verificar o motivo pelo qual uma das funções não é injetiva dizendo “*não é injetiva porque vários objetos têm a mesma imagem*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016). Parece que a aluna percebeu este conceito.

A análise da questão de aula do dia 15 de março (Apêndice 6) parece dar indícios, mais uma vez, de que a Rita se apropriou destes conceitos.

Tal como se pode constatar na figura seguinte, todas as funções apresentadas foram classificadas corretamente.



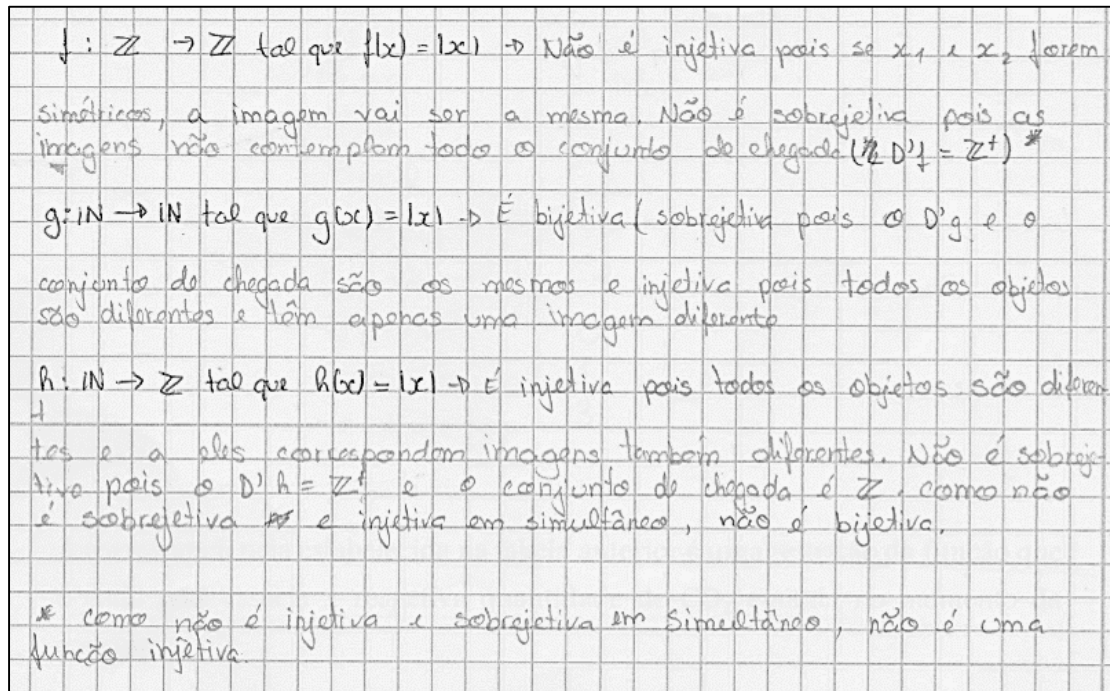


Figura 36 – Resposta da Rita à questão de aula do dia 15 março

Apenas algumas das justificações foram dadas de forma incipiente. Aquando da classificação da função  $f$ , a aluna, suportando-se de um asterisco, escreve o seguinte “como não é injetiva e sobrejetiva em simultâneo, não é uma função injetiva”. A autora acredita que isto tenha sido uma pequena distração e o que pretendia dizer é que a função em causa não era bijetiva.

A aluna resolveu, na íntegra, a tarefa extra-aula “A matemática pensa em tudo” (Apêndice 4). A pergunta 1 foi respondida de forma acertada. Já em relação à questão 2, encontram-se algumas falhas e contradições. Como se pode constatar na figura seguinte, a expressão da função  $P$  está errada. Além disso, os domínios e contradomínios apresentados são um pouco confusos. Começando pela função  $P$ , nada obriga a que os valores do tempo apresentados sejam números naturais. Além disso, o domínio da função  $C$  deveria ser um subconjunto do conjunto de chegada da função  $P$ . Isto porque, na primeira função, obtém-se o número de páginas processadas e, na segunda, calcula-se o custo do trabalho em função desse mesmo número de páginas.

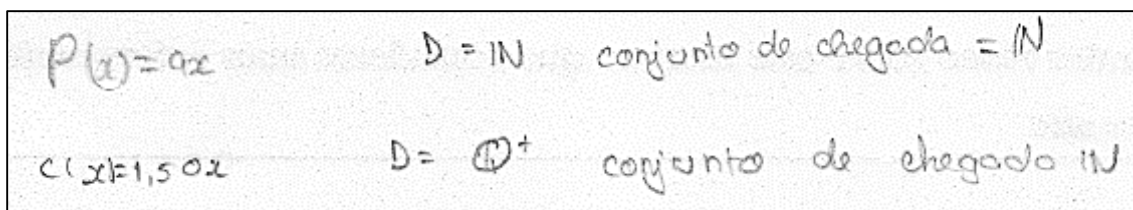
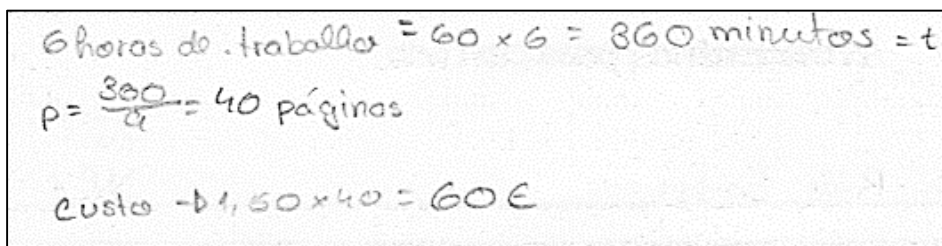


Figura 37 – Resolução da questão 2 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2

Contrariamente ao que seria esperado, a aluna resolveu a questão 2 de forma correta, como se pode ver na figura seguinte.



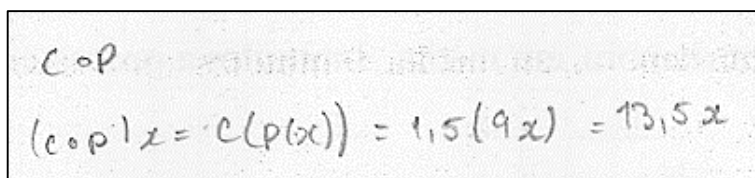
$$\begin{aligned}
 6 \text{ horas de trabalho} &= 60 \times 6 = 360 \text{ minutos} = t \\
 p &= \frac{360}{9} = 40 \text{ páginas} \\
 \text{custo} &= 1,50 \times 40 = 60 \text{ €}
 \end{aligned}$$

**Figura 38** – Resolução da questão 3 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2

Por algum motivo que a autora desconhece, neste momento, a aluna determinou o número de páginas de forma correta. Uma vez que, anteriormente, definiu mal a função P, seria expectável que, aqui, calculasse de forma errónea o número de páginas.

Relativamente à questão 4, a aluna *respondeu* “*representa o tempo gasto para processar um determinado número de páginas, com um determinado custo*”. Esta resposta dá indícios de que a Rita não percebeu o significado da expressão ou então de que não soube exprimir o seu significado.

Por fim, na questão 5, a aluna apresentou uma resposta incompleta, como se pode verificar na figura que se segue.



$$\begin{aligned}
 C \circ P \\
 (C \circ P)(x) &= C(P(x)) = 1,5(9x) = 13,5x
 \end{aligned}$$

**Figura 39** – Resolução da questão 5 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 2

A Rita, embora com o erro da função P, apresentou apenas a expressão da função composta, utilizando a notação adequada. Não fez qualquer referência ao domínio e conjunto de chegada desta.

Assim, parece existir indícios de que a aluna captou alguns pormenores inerentes à composição de funções, nomeadamente no que respeita a notação vulgarmente utilizada. No entanto, no que refere ao domínio da função composta, os conteúdos não parecem ter ficado bem cimentados.

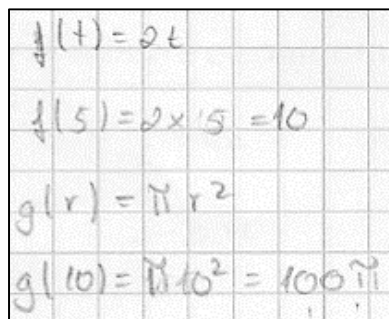
Durante a realização de uma atividade na aula, foi pedido à aluna que determinasse o domínio da função *gof*. A aluna, já neste momento, não foi capaz de responder

corretamente tendo afirmado que seria “*o domínio de f*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016).

Durante esta aula a aluna mostrou-se com algumas dificuldades, como se pode reparar com a intervenção descrita anteriormente. Costuma acompanhar com facilidade as aulas, o que neste caso não se sucedeu.

A Rita, no que respeita à questão de aula do dia 17 de março (Apêndice 7), começou por preencher adequadamente as tabelas apresentadas na primeira alínea.

Na segunda alínea, respondeu também de forma correta e clara, como se pode ver pela figura seguinte.



Handwritten mathematical work on grid paper showing function evaluations:

$$f(t) = 2t$$

$$f(5) = 2 \times 5 = 10$$

$$g(r) = \pi r^2$$

$$g(10) = \pi 10^2 = 100\pi$$

**Figura 40** – Resposta da Rita à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março

Na alínea c), a aluna apenas apresentou a resposta final sem explicitar qual o raciocínio utilizado (como se pode constatar na figura seguinte). Não há evidências de que tenha, de alguma forma, utilizado a função composta. Pode ter obtido a expressão da área através do contexto do problema.

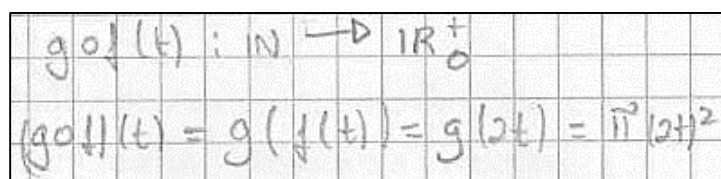


Handwritten formula for area A:

$$A = \pi (2t)^2$$

**Figura 41** - – Resposta da Rita à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março

Na última alínea, a aluna apresentou a expressão da função composta e os respetivos cálculos que necessitou de realizar. Como se pode constatar na figura seguinte, utilizou uma notação adequada.



Handwritten mathematical work showing function composition:

$$g \circ f(t) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(2t) = \pi (2t)^2$$

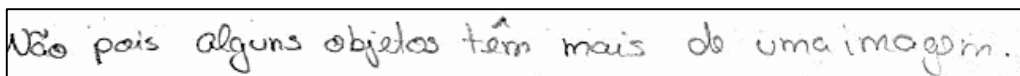
**Figura 42** – Resposta da Rita à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março

A expressão apresentada é a esperada, mas o domínio não está correto.

Tanto na tarefa extra-aula como na questão de aula relativas à função composta, a Rita não conseguiu determinar o domínio da composição de duas funções. A análise das tarefas parece indicar que, mesmo após a aula, a aluna não conseguiu colmatar as dificuldades que aparentou sentir na determinação do domínio da função composta.

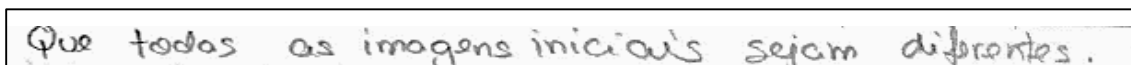
A terceira tarefa extra-aula – “Os mesmos dados, duas funções” (Apêndice 5) – foi resolvida na totalidade pela Rita. Preencheu a primeira questão com os dados retirados do *site* referido e, com esses mesmos dados, estabeleceu corretamente, na questão 2, a correspondência inversa.

Relativamente à questão 3, conseguiu responder e justificar de forma adequada, como se pode verificar pela figura seguinte. Apercebeu-se de que o mesmo objeto tinha mais do que uma imagem logo, não poderia ser função.



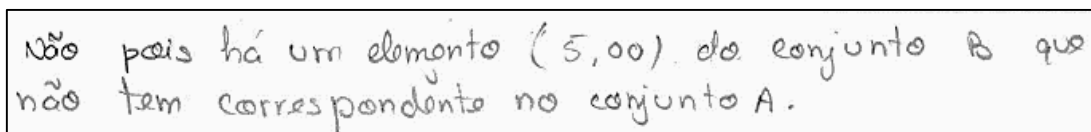
**Figura 43** – Resolução da questão 3 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3

Na questão 4, a aluna apresentou uma resposta próxima do que se pretendia – que a função inicial tinha de ser injetiva. Apesar de não ter dito por estas palavras, como se pode ver na figura seguinte, a aluna conseguiu concluir que as imagens da função inicial têm de ser todas diferentes.



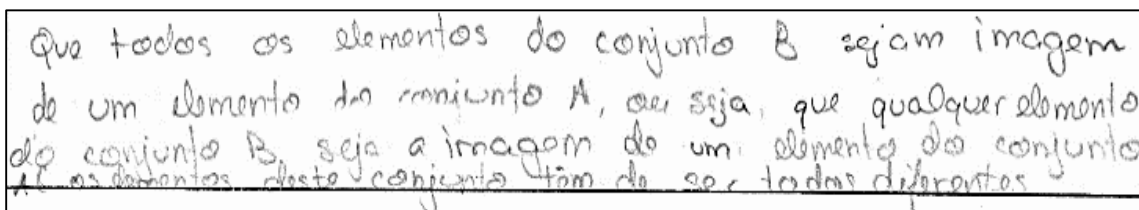
**Figura 44** – Resolução da questão 4 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3

Mais uma vez, em relação à questão 6, a aluna conseguiu estabelecer a correspondência inversa, sem aparentar dificuldades. Posto isto, na 7.<sup>a</sup> conseguiu identificar o motivo pelo qual a correspondência anterior não era função (como se pode verificar na figura seguinte).



**Figura 45** – Resolução da questão 7 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3

Tal como anteriormente, a aluna identificou a condição a impor à função inicial, embora não a tenha designado por sobrejetividade. Como mostra a figura que se segue, explicou, por palavras suas, qual era a condição.



Que todos os elementos do conjunto B sejam imagem de um elemento do conjunto A, ou seja, que qualquer elemento do conjunto B seja a imagem de um elemento do conjunto A. Os elementos deste conjunto têm de ser todos diferentes.

**Figura 46** – Resolução da questão 8 apresentada pela Rita na tarefa extra-aula 3

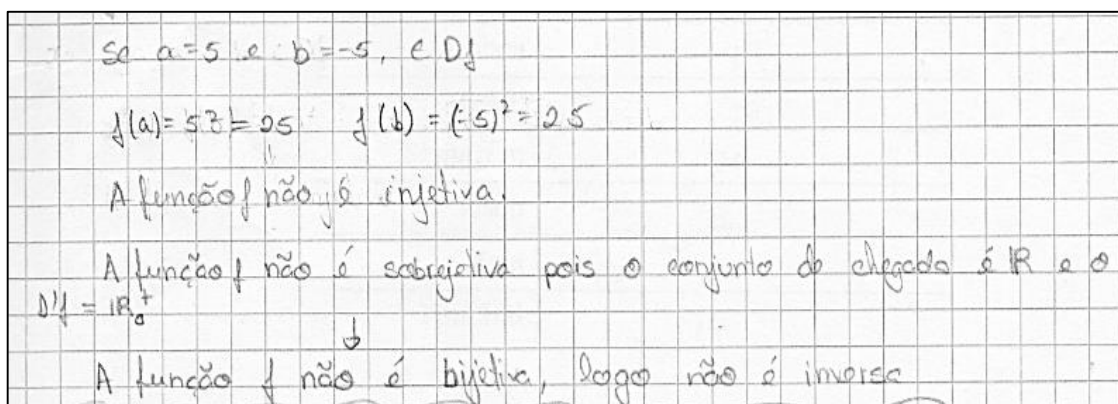
Como se pode verificar, face aos resultados apresentados, a aluna conseguiu resolver a tarefa sem evidenciar dificuldades. Não denominou as condições a impor para que a correspondência inversa de uma dada função fosse, também ela, uma função. No entanto, conseguiu explicar de forma clara essas mesmas condições.

No momento de correção da tarefa extra-aula, a aluna apresentou à turma a condição que escreveu na ficha. Quando lhe foi pedido que apresentasse a condição por uma só palavra, após pensar um pouco disse “tem de ser sobrejetiva” (Diário de Bordo, 4 de abril de 2016).

Foi uma aluna que participou na aula, envolvendo-se nas atividades propostas.

Relativamente à questão de aula do dia 4 de abril (Apêndice 8), a aluna cometeu alguns erros de linguagem e ainda deixou incompleta a sua resolução.

Relativamente à função  $f$ , a aluna apresentou uma resposta adequada e correta (como se pode verificar na figura seguinte).



Se  $a=5$  e  $b=-5$ , e  $Df$   
 $f(a)=5^2=25$      $f(b)=(-5)^2=25$   
 A função  $f$  não é injetiva.  
 A função  $f$  não é sobrejetiva pois o conjunto de chegada é  $\mathbb{R}$  e o  
 $Df = \mathbb{R}_0^+$   
 A função  $f$  não é bijetiva, logo não é inversa

**Figura 47** – Resposta da Rita à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $f$

Justificou a não injetividade da função utilizando um contraexemplo e, ainda, a não sobrejetividade. Cometeu apenas um pequeno erro de linguagem quando disse “logo não é inversa”. Deveria ter dito que a função não admite inversa.

Em relação à função  $g$ , a aluna, mais uma vez de forma exemplar, justificou a sua bijetividade. Cometeu o mesmo erro de linguagem anteriormente referido. Como se pode ver na figura seguinte, a aluna não chegou a determinar a expressão da função inversa, tendo apresentado apenas os respetivos domínio e contradomínio.

Se  $c, d \in Dg$

$$g(c) = g(d) \Leftrightarrow a - 5 = b - 5 \Leftrightarrow a = b$$

A função  $g$  é injetiva

A função  $g$  é sobrejetiva pois o  $D'g = \mathbb{R}$  é igual ao conjunto de chegada

A função  $g$  é bijetiva e por isso se inversa.

$$Dg^{-1} = D'g = \mathbb{R}^+$$

$$D'g^{-1} = Dg = \mathbb{R}$$

**Figura 48** – Resposta da Rita à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $g$

Pensa-se que o trabalho que a aluna realizou em todas as tarefas extra-aula contribuiu para a construção de conhecimento sobre os conteúdos lá abordados e a sua respetiva aplicação em outras tarefas, nomeadamente nas questões-aula. A maior dificuldade demonstrada foi em determinar o domínio de uma função composta.

## 2.2. Autonomia

### (a) Possibilidade de construção autónoma de conhecimento

Recorde-se que a aluna, na primeira tarefa extra-aula, não respondeu à pergunta 3 e apenas iniciou a 2. Já nas outras tarefas, a aluna resolveu todas as questões. Este facto revela que a aluna teve uma evolução, desde logo, no envolvimento autónomo na resolução das tarefas extra-aula propostas. No entanto, tal autonomia não foi suficiente para responder corretamente a todas as questões.

Como a Rita no QF (Apêndice 2) assinalou concordo totalmente com a afirmação “compreendi o enunciado das tarefas”, poderá não ter respondido ou então fê-lo de forma incorreta por falta de conhecimento sobre os assuntos tratados e por não ter procurado informação suficiente para dar uma resposta correta.

Veja-se, no quadro seguinte, as respostas que a aluna assinalou e que dizem respeito à possibilidade de construção autónoma de conhecimento.

Afirmações	QI	QF
Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes do tópico ser abordado na escola.	Concordo	Discordo
Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.	Discordo	Concordo

**Quadro 8** – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (a)

Em relação à primeira afirmação do quadro anterior, no QI (Apêndice 1) a aluna começou por assinalar concordo. No entanto, mais tarde, no QF, passou a assinalar discordo. Esperava-se, com a abordagem adotada, que os alunos se apercebessem de que é possível aprender alguma matemática mesmo antes de os conteúdos sejam explicados pelo professor. No entanto, após a estratégia adotada no âmbito deste estudo, a aluna passou a assinalar a resposta contrária ao que se esperava.

Já em relação à segunda afirmação, a aluna começou por selecionar a opção discordo no QI, o que dava a entender de que poderiam existir tópicos matemáticos possíveis de serem compreendidos se estudados por si. No entanto, no QF, assinalou concordo. Como se viu anteriormente, a aluna demonstrou algumas dificuldades no que respeita aos conteúdos abordados nas duas últimas aulas. Talvez este seja o motivo pelo qual a aluna tenha mudado de opinião em relação à possibilidade de construir conhecimento de forma autónoma.

*(b) Estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia*

O quadro seguinte esquematiza as respostas que a aluna selecionou, em ambos os questionários, no que se refere às afirmações que têm que ver com as estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia.

Relativamente à procura de ajuda nos serviços e ferramentas da *Web*, a posição foi mantida – discordo.

Afirmações	QI	QF
Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas <i>Web</i> .	Discordo	Discordo
Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor esclareça – procuro ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas.	Discordo	Concordo totalmente

Quadro 9 – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (b)

No entanto, como se pode verificar, existe uma grande evolução nas respostas que apresentou em relação à procura de ajuda para esclarecer dúvidas através de colegas, familiares ou outras pessoas. Deixou de assinalar discordo e passou a assinalar concordo totalmente.

A mudança de posição em relação a esta afirmação pode dever-se à necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos que admitiu ter para resolver as tarefas extra-aula. Como se pode verificar no quadro seguinte, a aluna escolheu a opção concordo relativamente à primeira afirmação sobre a realização de tarefas extra-aula.

Afirmações	QF
Enquanto realizava as tarefas senti necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos.	Concordo
Enquanto realizava as tarefas procurei informação em outros sítios que não no guião fornecido pelo professor.	Discordo

Quadro 10 – Respostas da Rita ao QF em relação à dimensão (b)

Já em relação à procura de informação em outros sítios que não apenas no guião fornecido pelo professor, a aluna assinalou discordo.

Portanto, parece que a ajuda que procurou para realizar as tarefas extra-aula proveio de pessoas e não de outros sítios como por exemplo de recursos disponibilizados na *Internet*.



*(c) Influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática*

Quanto à influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática, o quadro que se segue mostra as respostas que a aluna assinalou relativamente às afirmações que dizem respeito a esta dimensão.

Afirmações	QI	QF
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.	Concordo	Discordo
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia.	Concordo	Concordo

**Quadro 11** – Respostas da Rita aos QI e QF em relação à dimensão (c)

Deixou de assinalar concordo para, no QF, assinalar discordo que a antecipação de matéria permite acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula. Embora as suas intervenções durante a aula tivessem sido positivas, isto é, tenham servido para corrigir gralhas cometidas na tarefa extra-aula, a prestação que teve nas últimas duas questões de aula evidenciou ainda algumas dificuldades ao nível dos conteúdos abordados num momento prévio e extra-aula.

Já em relação ao desenvolvimento da autonomia, a aluna manteve a sua resposta nos dois questionários, tendo assinalado concordo. Como se viu no início deste subcapítulo, a aluna parece ter evoluído no envolvimento autónomo na resolução das tarefas extra-aula, tendo a própria admitido ter procurado ajuda para as resolver.

No QF, em relação às afirmações relacionadas com as tarefas extra-aula realizadas, as respostas que a Rita assinalou encontram-se sintetizadas no quadro que se segue.

A aluna assinalou a opção concordo que a realização das tarefas contribuiu para o seu maior envolvimento e interesse na aula. Como se viu anteriormente, era uma aluna que não participava muito oralmente na aula. No entanto, nestas aulas, participou mais, apresentando as suas respostas e reformulando outras.

Afirmações	QF
A resolução de tarefas contribuiu para a construção de conhecimentos em relação aos conteúdos envolvidos.	Concordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior envolvimento na aula.	Concordo
Ter realizado as tarefas facilitou a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma.	Discordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior interesse na aula.	Concordo

**Quadro 12** – Respostas da Rita ao QF em relação à dimensão (c)

Parece que a aluna admitiu existir influência do trabalho prévio e extra-aula ao nível da construção de conhecimento, envolvimento e interesse na aula. No entanto, em relação ao seu contributo para a resolução de tarefas de forma mais autónoma, a aluna não manteve a mesma opinião, tendo referido discordo.

### 3. Leonor

No momento do estudo, a Leonor tinha 15 anos e muitas atividades extracurriculares. Durante o ano letivo, a discente e os pais mostraram-se preocupados com a falta de tempo que a frequência destas atividades causava nas questões de âmbito escolar. No entanto, parece que a aluna conseguiu gerir o seu tempo de forma a conciliar tudo. Nas aulas, a investigadora pôde verificar que se tratava de uma aluna empenhada que se envolvia e participava colocando as suas dúvidas sempre que considerava pertinente. Tal como a maioria dos alunos da turma, frequentava as sessões de apoio e colocava, também aí, as suas dúvidas, o que mostrava que a aluna tinha trabalhado nos momentos extra-aula.

Tal como a maioria da turma, no QI (Apêndice 1) assumiu a matemática como uma das três disciplinas favoritas. Não considerou esta ciência difícil e admitiu gostar de resolver tarefas, desafios e/ou jogos matemáticos. Referiu ter apetência e ser boa aluna a esta disciplina. Tendo em conta a resposta ao questionário, parece ter noção da importância desta na sua formação, pois discordou totalmente da afirmação *“a matemática não é importante para a minha formação”*.

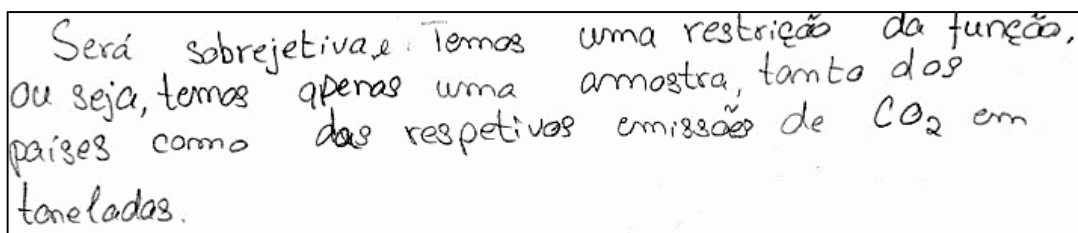
Relativamente à utilização de equipamentos tecnológicos, no QI assinalou possuir o telemóvel, o computador portátil e o *tablet*, todos eles com acesso à *Internet*. De entre as opções apresentadas no questionário, admitiu utilizar todos os serviços e ferramentas *Web* diariamente, com exceção de *blogues* e *micro-blogues* e dos serviços de suporte ao trabalho colaborativo, que assinalou utilizar diariamente.

Em relação ao uso que fazia da *Internet*, no QI assinalou utilizar as ferramentas e serviços *Web* que permitem esclarecer dúvidas ou desenvolver trabalhos para questões de âmbito escolar. Assinalou utilizar todas as outras opções apresentadas no QI para questões quer do âmbito escolar quer pessoal.

### 3.1. Construção e aplicação de conhecimentos

A Leonor resolveu apenas as questões 1 e 4.a) e não completou a 2 da tarefa extra-aula intitulada “A emissão de CO<sub>2</sub>” (Apêndice 3).

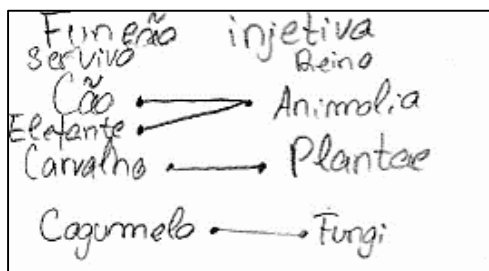
A tabela apresentada na questão 1 foi preenchida com os dados fornecidos na aula. Posto isto, na questão 2, a aluna (como se pode ver na figura seguinte) classificou a função como sendo sobrejetiva e justificou referindo o facto de se tratar de uma amostra quer dos países quer das respetivas emissões de CO<sub>2</sub>. É precisamente por este motivo que a função não é sobrejetiva, pois apresenta apenas uma parte das toneladas de CO<sub>2</sub> emitidas por todos os países. Em relação à injetividade, não existe qualquer anotação por parte da aluna.



Será sobrejetiva. Temos uma restrição da função, ou seja, temos apenas uma amostra, tanto dos países como das respetivas emissões de CO<sub>2</sub> em toneladas.

**Figura 49** – Resolução da questão 2 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 1

Em relação à questão 3, não apresentou qualquer resposta e, relativamente à 4, apenas a alínea a) foi preenchida. A aluna tentou utilizar um exemplo da vida real mas, como se pode ver na figura seguinte, a função que representou no diagrama não é uma função injetiva pois à imagem Reino *Animalia* corresponde mais do que um objeto – cão e elefante.



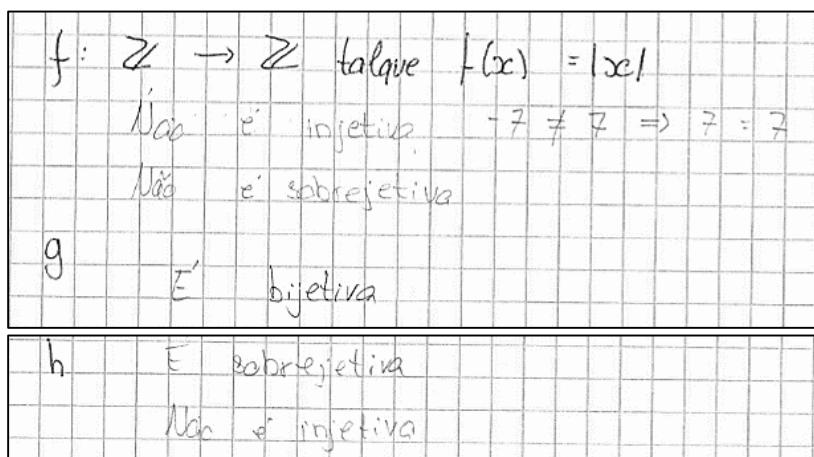
**Figura 50** – Resolução da questão 4.a) apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 1

A aluna parece evidenciar ter tido algumas dificuldades na resolução da tarefa extra-aula.

No momento de correção da tarefa durante a aula, a aluna interveio: “*professora, não percebi neste contexto como é que vemos se é sobrejetiva ou não*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016). Após a explicação da professora, que referiu o fato de ser uma restrição e, nesse sentido, teria o mesmo conjunto de chegada da função inicial, a aluna corrigiu a sua resposta e afirmou “*então esta função não é sobrejetiva*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016).

A Leonor mostrou interesse pela aula e tentou acompanhar a mesma. Sempre que não percebia alguma coisa questionava, tal como já era habitual.

Ao longo da resolução da questão de aula do dia 15 de março (Apêndice 6), parece ser clara a dificuldade que a aluna teve em justificar a classificação atribuída a cada umas das funções. A figura que se segue mostra a resposta à questão referida.



**Figura 51** – Resposta da Leonor à questão de aula do dia 15 março

Relativamente à função  $f$ , como se pode constatar na figura anterior, a aluna classificou corretamente quanto à injetividade e sobrejetividade. Ainda tentou justificar a não injetividade. No entanto, esperava-se outro tipo de cuidado com a notação por parte de uma aluna que frequenta o Ensino Secundário.

Relativamente à função  $g$ , classificou-a como bijetiva, mas não apresentou qualquer tentativa de justificação.

Por fim, a função  $h$  foi classificada erradamente tanto quanto à injetividade como à sobrejetividade.

Na segunda tarefa extra-aula – “A matemática pensa em tudo” (Apêndice 4) – a aluna, mais uma vez, não a resolveu integralmente, tendo deixado duas questões em branco. Relativamente à questão 1 desta tarefa, a aluna respondeu o que era esperado.

A semelhança das respostas dadas tanto na questão 2 como na questão 3 permite à investigadora pensar que a Leonor e o Jaime (caso já estudado anteriormente) resolveram esta tarefa em conjunto. Relativamente à questão 2, apresentam o mesmo raciocínio, cometendo o mesmo erro na expressão da função  $P$  (como se pode ver na figura seguinte).

$P: y = 90x + b$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $n.º \text{ de páginas} \quad \text{tempo}$   
 Conjunto de chegada  $\rightarrow n.º \text{ de páginas } (y)$   
 Domínio  $\rightarrow \text{tempo } (x)$

$C: y = 1,50x + b$   
 $\downarrow$   
 conjunto de chegada  $\rightarrow \text{custo total das páginas } (y)$   
 Domínio  $\rightarrow \text{número de páginas processadas } (x)$

**Figura 52** – Resolução da questão 2 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 2

Analisando a figura que se segue, verifica-se que, apesar do erro cometido ao definir a função  $P$  na questão anterior, a aluna, tal como o Jaime, resolveu a questão 3 de forma correta.

$60 \times 6 = 360 \text{ min}$   
 $\frac{360}{9} = 40 \text{ pag}$   
 $40 \times 1,5 = 60€$   
 R: Serão 60€.

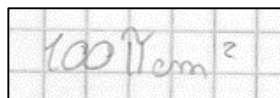
**Figura 53** – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 2

Na tarefa, como se viu, a aluna não respondeu à questão 5.

Na aula, durante a correção desta tarefa, a aluna disse “fica 1,5 vezes  $t$  sobre 9” (Diário de Bordo, 17 de março de 2016). Ainda em relação a esta questão, teve-se oportunidade de ouvir a aluna dizer “o domínio são todos os números positivos” (Diário de Bordo, 17 de março de 2016).

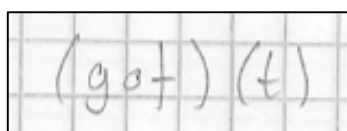
Foi uma aluna participativa e envolvida nas atividades propostas. Mostrou interesse, apresentando sempre que conveniente as suas resoluções e dúvidas.

Relativamente à questão de aula do dia 17 de março (Apêndice 7), a aluna preencheu adequadamente as tabelas apresentadas na primeira alínea e, na seguinte, apresentou o resultado correto, mas sem denunciar o raciocínio utilizado (tal pode ser constatado na figura seguinte).



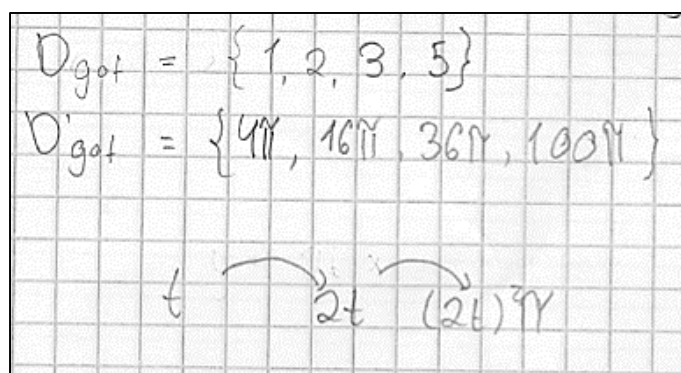
**Figura 54** – Resposta da Leonor à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março

Na alínea seguinte, a aluna apresentou a expressão da função composta que representa o solicitado. No entanto, não prosseguiu por forma a completar a resposta, como se pode ver na figura seguinte. Apesar de incompleta, dá indícios de que percebeu que a expressão solicitada se pode obter através de uma composição de funções.



**Figura 55** – Resposta da Leonor à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março

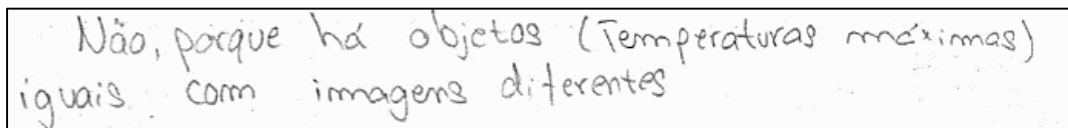
Por fim, na última alínea, apresentou corretamente o domínio, contradomínio e a expressão. É curioso o facto de, na questão anterior, a aluna não ter determinado a expressão da área e aqui ter conseguido.



**Figura 56** – Resposta da Leonor à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 março

A última tarefa extra-aula – “Os mesmos dados, duas funções” (Apêndice 5) – foi totalmente resolvida. A aluna preencheu a primeira tabela com os dados fornecidos no *site* mencionado e, de seguida, estabeleceu corretamente a correspondência inversa.

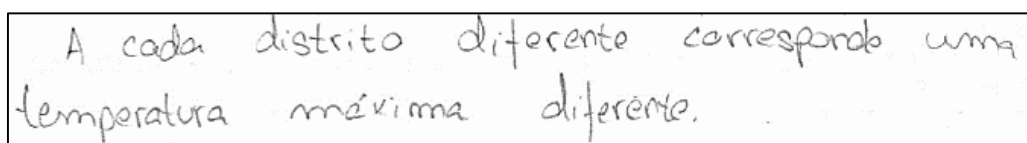
Relativamente à questão 3, a Leonor afirmou que a correspondência não era função e justificou adequadamente, como se pode constatar na figura que se segue.



Não, porque há objetos (Temperaturas máximas) iguais, com imagens diferentes

**Figura 57** – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3

A aluna, na questão 4, conseguiu explicar a condição a impor à função inicial. Embora o tenha feito por outras palavras, a aluna percebeu que a cada um dos objetos tem de corresponder imagens diferentes.



A cada distrito diferente corresponde uma temperatura máxima diferente.

**Figura 58** – Resolução da questão 3 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3

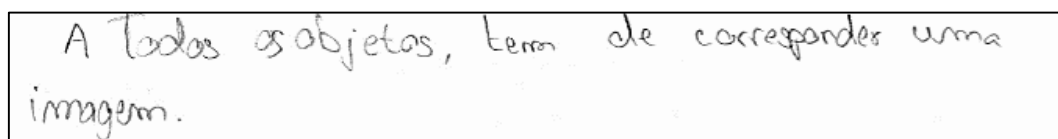
Depois de estabelecer a correspondência inversa na questão 6, a Leonor justificou corretamente o motivo pelo qual esta não é função (como se pode ver na figura seguinte).



Não, porque há um objeto sem imagem.

**Figura 59** – Resolução da questão 7 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3

Por fim, na questão 8, a resposta apresentada não é, de todo, aceitável. Como se pode ver na figura seguinte, o que a aluna tinha em mente era a condição necessária para que uma correspondência seja função e não para ser injetiva.



A todos os objetos, tem de corresponder uma imagem.

**Figura 60** – Resolução da questão 8 apresentada pela Leonor na tarefa extra-aula 3

Durante a correção da tarefa extra-aula na sessão destinada a tal, a aluna apresentou a resposta à questão 4 que se pôde ver anteriormente e, após ter sido questionada pela professora, reconheceu do que se trata dizendo “*tem de ser injetiva*” (Diário de Bordo, 4 de abril de 2016).

Também a Leonor se mostrou menos envolvida nesta aula. Participou e contribuiu menos nesta aula em relação às outras.

A resolução da última questão de aula do dia 4 de abril (Apêndice 8) aparece de forma desorganizada, como se pode verificar na figura seguinte.

$$g^{-1}(x) = x - 5 =$$

$$\Rightarrow y = x - 5$$

$$\Rightarrow x = y + 5$$

Para poder haver inversas, as funções têm de ser bijetivas

$f(x) = x^2$  não é bijetiva ex:  $f(-2) = 4$   
 $f(2) = 4$

$g(x) = x - 5$  é bijetiva

**Figura 61** – Resposta da Leonor à questão de aula do dia 4 de abril

Pode-se constatar que a relação entre a bijetividade de uma função e a existência de inversa foi bem frisada. Relativamente à função  $f$ , justificou a não injetividade da função mostrando um contraexemplo.

Como se pode ver na figura anterior, apesar de não justificar o motivo pelo qual a função  $g$  é bijetiva, a aluna referiu-o e determinou a função inversa usando a notação adequada.

### 3.2. Autonomia

#### (a) Possibilidade de construção autónoma de conhecimento

Recorde-se que a aluna, na primeira tarefa extra-aula, deixou 4 questões por fazer e 1 incompleta. Na segunda tarefa extra-aula, não houve resposta a 2 das questões apresentadas. Por fim, na última, respondeu a todas as questões. Parece que a aluna evoluiu no envolvimento autónomo na resolução das tarefas extra-aula propostas. No entanto, tal autonomia não foi suficiente para responder corretamente a todas as perguntas.

No QF (Apêndice 2) a aluna assinalou que compreendeu o enunciado. Portanto, terá não respondido ou errado outras questões – 2 e 4.a) da primeira tarefa extra-aula, questão 1 da segunda tarefa extra-aula e questão 8 da última tarefa extra-aula – talvez por não ter conhecimentos suficientes sobre o assunto tratado e não ter procurado informação suficiente para dar uma resposta correta.



O quadro que se segue sintetiza as respostas que a Leonor assinalou, em ambos os questionários, nas afirmações que se referem à dimensão que se está a analisar.

Afirmações	QI	QF
Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes do tópico ser abordado na escola.	Concordo totalmente	Concordo totalmente
Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.	Discordo	Discordo totalmente

**Quadro 13** – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (a)

Tanto no QI (Apêndice 1) como no QF, a aluna concordou totalmente com a primeira afirmação do quadro anterior. Para esta aluna não parecem existir dúvidas quanto à possibilidade de construir conhecimento de forma autónoma antes do tópico ser abordado em aula.

Em relação à segunda afirmação, nota-se uma ligeira mudança de opinião. Começou por assinalar discordo no QI e passou a assinalar discordo totalmente no QF. A aluna parece ter-se mantido na mesma linha de pensamento, indiciando de que conseguiria compreender um tópico matemático estudado pela própria, sem que seja explicado pelo professor.

As respostas apresentadas mostram uma opinião muito positiva acerca da possibilidade de construção autónoma de conhecimento.

*(b) Estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia*

Como se pode ver no quadro seguinte, a opinião da aluna mantém-se em ambos os momentos relativamente às afirmações apresentadas.

Em relação às duas afirmações, a aluna assinalou sempre concordo totalmente. Segundo esta, quando possui dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, parece admitir que procura ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas e, também, nos serviços e ferramentas *Web*.

Afirmações	QI	QF
Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor esclareça – procuro ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas.	Concordo totalmente	Concordo totalmente
Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas <i>Web</i> .	Concordo totalmente	Concordo totalmente

**Quadro 14** – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (b)

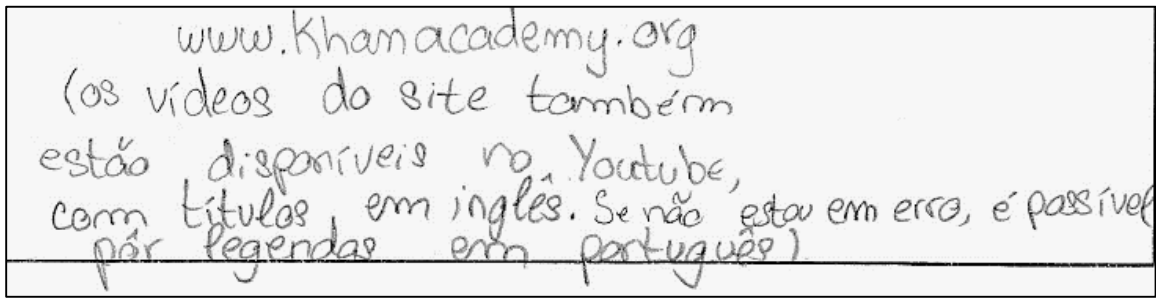
O quadro que se segue apresenta as respostas que a aluna assinalou, no QF, nas afirmações que se referem, em específico, às tarefas extra-aula e estão relacionadas com a dimensão que se está a analisar.

Afirmações	QF
Enquanto realizava as tarefas senti necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos.	Concordo
Enquanto realizava as tarefas procurei informação em outros sítios que não no guião fornecido pelo professor.	Concordo totalmente

**Quadro 15** – Respostas da Leonor ao QF em relação à dimensão (b)

Com se pode reparar, a aluna assinalou concordo com a primeira afirmação. Dá a entender que sentiu necessidade de procurar ajuda para resolver as tarefas extra-aula. Na mesma ordem de pensamento, admite ter procurado ajuda em outros sítios que não apenas o guião fornecido pelo professor, ao assinalar concordo totalmente em relação à segunda afirmação do quadro anterior.

Em algumas das tarefas, eram sugeridos vídeos cujo assunto tratado correspondia ao conteúdo matemático das respetivas tarefas. A aluna revelou ter acedido aos mesmos e, quando se solicitou sugestões de outros vídeos, a própria fê-lo, como se pode ver na figura seguinte.



**Figura 62** – Sugestão de um *site* procedida da Leonor na tarefa extra-aula 3

Esta atitude dá indícios de que a aluna procurou informação na *Internet* por forma a colmatar eventuais dúvidas ou cimentar os conteúdos tratados. No entanto, nem sempre foi uma estratégia eficaz, dada a falta de respostas e as respostas erradas que apresentou.

*(c) Influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática*

Quanto à influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática, o quadro que se segue mostra as respostas que a aluna assinalou em ambos os questionários.

Afirmações	QI	QF
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.	Concordo totalmente	Concordo totalmente
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia.	Concordo totalmente	Concordo totalmente

**Quadro 16** – Respostas da Leonor aos QI e QF em relação à dimensão (c)

A aluna, mais uma vez, manteve as respostas no QI e no QF. Assinalou concordar totalmente que a antecipação do estudo permite compreender melhor a matéria abordada na aula. De facto, a aluna apresentou algumas correções às tarefas extra-aula que realizou.

Assinalou também concordar totalmente que antecipar o estudo permite desenvolver a autonomia. De facto, como se viu, a aluna parece revelar ter desenvolvido algumas competências de autonomia manifestadas, por exemplo, pelo visionamento dos vídeos e ainda pelas respostas aos questionários que indiciam que esta procura ajuda quando tem dúvidas.

Em relação às afirmações que estavam ligadas diretamente às tarefas extra-aula, apresentam-se as opções que a Leonor assinalou no quadro abaixo.

<b>Afirmações</b>	<b>QF</b>
A resolução de tarefas contribuiu para a construção de conhecimentos em relação aos conteúdos envolvidos.	Concordo totalmente
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior envolvimento na aula.	Concordo totalmente
Ter realizado as tarefas facilitou a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma.	Concordo totalmente
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior interesse na aula.	Concordo totalmente

**Quadro 17** – Respostas da Leonor ao QF em relação à dimensão (c)

A aluna, mais uma vez considerando as respostas que assinalou, parece ter uma visão muito positiva acerca da antecipação da matéria e, em particular, das tarefas extra-aula que realizou no âmbito deste trabalho.

Assinalou concordar totalmente que a resolução de tarefas contribuiu para a construção de conhecimento. A mesma opção foi assinalada nas outras três afirmações que relacionam a realização das tarefas com o maior envolvimento na aula, a resolução de atividades propostas na aula de forma mais autónoma e ainda com o contributo para um maior interesse na aula.

Como se pôde constatar anteriormente, na aula foi participando nos momentos de correção das tarefas extra-aula. Mostrou-se, por vezes, um pouco confusa, mas o que interessa é que procurou esclarecer as suas dúvidas. Na realidade, e face à análise anterior, a ajuda que procurou por forma a colmatar dificuldades sentidas não foi feita apenas em aula – parece ter procurado informação na Internet e com outras pessoas.

#### **4. Teresa**

A teresa tinha 15 anos no momento do estudo. Nas aulas, a investigadora pôde verificar que se tratava de uma aluna que se envolvia e participava nas tarefas propostas e que não intervinha muito oralmente. Tal como a maioria dos alunos da turma, frequentava as sessões de apoio e colocava, principalmente aí, as suas dúvidas.

Tal como os outros colegas cuja análise se fez neste trabalho, no QI (Apêndice 2) considerou também a matemática como uma das 3 disciplinas favoritas. Não considerou a matemática difícil e assumiu gostar de resolver tarefas e desafios/jogos matemáticos. Assinalou discordar quando confrontada com a afirmação “*a matemática não é importante para a minha formação*” e também com o facto de não ser boa aluna, tendo considerado ter apetência para esta ciência.

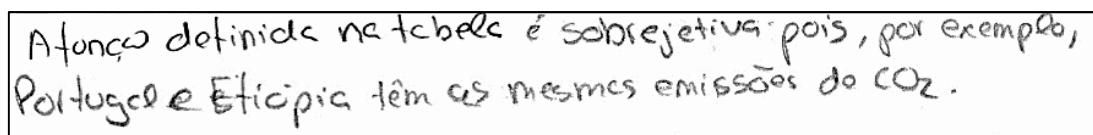
Relativamente aos dispositivos tecnológicos, no questionário assinalou possuir telemóvel, computador portátil e *tablet*. Assinalou não utilizar *blogues* e *micro-blogues* e serviços de suporte ao trabalho colaborativo. De entre os serviços ou ferramentas que utilizava, assinalou raramente usar os que permitem armazenar e partilhar ficheiros, as plataformas de *e-learning* e ainda as ferramentas de comunicação síncrona. Assinalou utilizar diariamente as redes sociais e as ferramentas de comunicação assíncrona.

Quando acedia à *Internet*, no QI mencionou utilizar os serviços e ferramentas *Web* que permitem jogar ou comunicar para questões/assuntos de âmbito pessoal. As outras opções evidenciadas no questionário são utilizadas pela aluna para questões de âmbito pessoal e escolar.

#### 4.1. Construção e aplicação de conhecimentos

A Teresa respondeu apenas à primeira e segunda questões da tarefa extra-aula “A emissão de CO<sub>2</sub>” (Apêndice 3).

A tabela da primeira questão foi preenchida com os dados fornecidos na aula. Relativamente à questão 2, a questão que a aluna apresentou encontra-se na figura que se segue.



A função definida na tabela é sobrejetiva pois, por exemplo, Portugal e Etiópia têm as mesmas emissões de CO<sub>2</sub>.

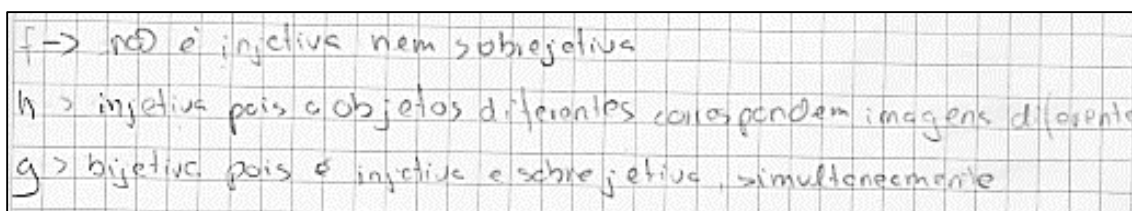
Figura 63 – Resolução da questão 2 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 1

Parece ser clara a dificuldade que a aluna teve em compreender os conceitos envolvidos na tarefa. Pois, apesar de ter referido a sobrejetividade, a justificação apresentada relaciona-se com a injetividade.

Na sessão destinada à correção da tarefa extra-aula, a aluna mostrou-se claramente confusa no que respeita à questão 2, não tendo conseguido reformular a resposta que apresentou quanto à sobrejetividade. Já em relação à injetividade, a aluna referiu corretamente a não injetividade justificando a sua escolha referindo: “*para objetos diferentes não se tem sempre imagens diferentes*” (Diário de Bordo, 15 de março de 2016). A professora reparou que a aluna não apresentou qualquer resposta na tarefa e questionou-a em relação a isso. A aluna mencionou esquecimento como justificação.

Foi uma agradável surpresa ver que a Teresa participou e demonstrou algum interesse pela aula através das suas participações. Normalmente não intervinha muito oralmente, o que se contrariou nesta sessão.

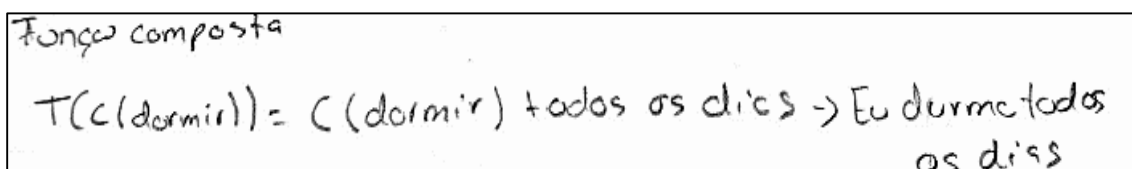
Apesar das dificuldades evidenciadas na primeira tarefa extra-aula, a aluna, na questão de aula do dia 15 de março (Apêndice 6), conseguiu classificar corretamente as funções apresentadas, como se pode verificar na figura seguinte.



**Figura 64** – Resposta da Teresa à questão de aula do dia 15 março

No que respeita à função  $h$ , não houve qualquer referência à sobrejetividade. A única justificação apresentada, mesmo tendo sido feita de forma muito incipiente, encontra-se correta.

Na tarefa extra-aula “A matemática pensa em tudo” (Apêndice 4), a aluna deixou duas questões por resolver – a primeira e a última. Começou por identificar, na questão 1, o significado da expressão apresentada. Como se pode ver na figura seguinte, a resposta está correta.



**Figura 65** – Resolução da questão 1 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2

A aluna não apresentou qualquer expressão para as funções apresentadas na questão 2. Daí, na questão seguinte ter efetuado os cálculos através de regras de 3 simples. Como se

pode verificar na figura que se segue, apesar de não ser da forma que se pretendia, a aluna apresentou uma resolução adequada à situação em questão.

$$\begin{array}{l} 1h \rightarrow 60 \text{ min} \\ x \rightarrow 9 \text{ min} \\ x = \frac{9 \times 1}{60} = 0,15h \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ pag} \rightarrow 0,15h (9 \text{ min}) \\ x_1 \rightarrow 6,0h \\ x_1 = \frac{6,0 \times 1}{0,15} = 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ pag} \rightarrow 1,50€ \\ 40 \text{ pag} \rightarrow x_2 \\ x_2 = \frac{40 \times 1,50}{1} = 60€ \end{array}$$

**Figura 66** – Resolução da questão 3 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2

Relativamente à questão 4, como se pode ver na figura seguinte, a Teresa identificou corretamente a expressão apresentada.

O custo do processamento de pag. em funç do tempo

**Figura 67** – Resolução da questão 4 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 2

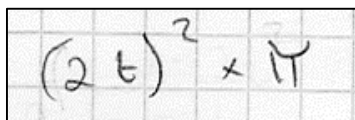
Mais uma vez a Teresa se mostrou interessada e envolvida na aula. A aluna chamou a professora para perguntar se a resolução que fez da questão 3 estava correta. Neste momento, a professora teve oportunidade de ver as questões que a aluna não tinha feito e questionou-a acerca disso. Esta respondeu que não conseguiu fazer a primeira questão e, por isso, não pode fazer também a questão 5.

Na questão de aula do dia 17 de março (Apêndice 7), a Teresa começou por preencher corretamente as tabelas na primeira alínea. Na segunda alínea, embora pareça não ter utilizado as tabelas anteriormente preenchidas, calculou a área apresentando o resultado esperado (como se pode constatar na figura seguinte).

$$\begin{array}{l} r_{ai0} = 10 \\ r^2 \pi = 100 \pi \end{array}$$

**Figura 68** – Resposta da Teresa à alínea 1.2. da questão de aula do dia 17 março

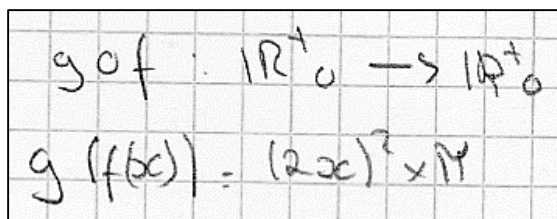
Como se pode verificar na figura que se segue, mais uma vez, sem apresentar qualquer tipo de cálculos ou raciocínio, a aluna apresentou corretamente a expressão da área solicitada.



$$(2t)^2 \times 11$$

**Figura 69** – Resposta da Teresa à alínea 1.3. da questão de aula do dia 17 março

Por fim, na última alínea, escreveu a expressão correta, que já tinha sido apresentada anteriormente. Mas o domínio não está correto, face ao contexto inicial do problema. A resolução desta alínea encontra-se na figura seguinte.



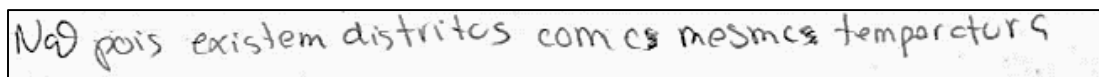
$$g \circ f : \mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}^+_0$$

$$g(f(x)) = (2x)^2 \times 11$$

**Figura 70** – Resposta da Teresa à alínea 1.4. da questão de aula do dia 17 março

Na última tarefa extra-aula – “Os mesmos dados, duas funções” (Apêndice 5) – a Teresa respondeu a todas as questões. A investigadora considera que foi na que teve melhor desempenho.

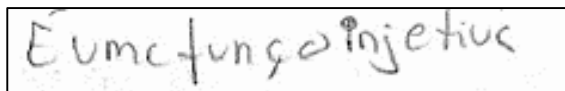
Após completar a tabela inicial, estabeleceu corretamente a correspondência inversa. Na questão 3, apresentou uma resposta acertada na medida em que justificou, como se pode ver na imagem seguinte, de forma clara o facto de a correspondência anterior não ser função.



Não pois existem distritos com as mesmas temperaturas

**Figura 71** – Resolução da questão 3 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3

De entre os casos seleccionados neste estudo, a Teresa foi a única que, na questão 4, respondeu de forma clara e concreta (ver imagem seguinte).



É uma função injetiva

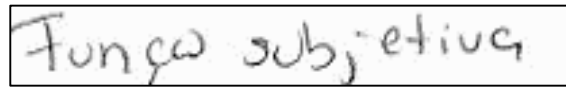
**Figura 72** – Resolução da questão 4 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3

Depois de ter estabelecido a correspondência inversa na questão 6, admitiu que esta não era função. Apenas não apresentou o motivo.

Em relação à última questão, mais uma vez tendo sido a única de entre os casos analisados, identificou de forma clara a condição a impor à função inicial. No entanto,



como se pode verificar na imagem seguinte, cometeu um erro ao escrever a palavra sobrejetiva.

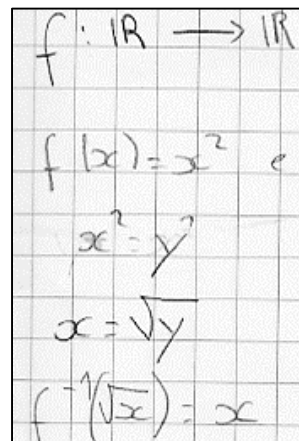


**Figura 73** – Resolução da questão 7 apresentada pela Teresa na tarefa extra-aula 3

Durante a correção da tarefa na aula destinada a tal, a aluna apenas apresentou a resposta, que já estava correta, à questão 7.

Também a Teresa se envolveu e participou nesta aula, dando evidências de algum cansaço.

Por fim, na questão de aula do dia 4 de abril (Apêndice 8), relativamente à função  $f$ , a aluna não identificou que a função não era invertível – já que não era injetiva – e tentou determinar logo a inversa (como se pode constatar na figura seguinte).



$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 f(x) &= x^2 \\
 x^2 &= y \\
 x &= \sqrt{y} \\
 f^{-1}(\sqrt{x}) &= x
 \end{aligned}$$

**Figura 74** – Resposta da Teresa à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $f$

No que respeita à função  $g$ , aconteceu o mesmo. Mesmo antes de verificar se a função era bijetiva, a aluna começou por determinar a inversa. Como se pode ver na figura seguinte, determinou corretamente a expressão da função inversa, no entanto, não utilizou de forma adequada a notação, como se pode ver pela última coisa escreveu.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = x - 5$$

$$y = x - 5 \quad | +5 \quad y + 5 = x$$

$$g^{-1}(x + 5) = 5$$

**Figura 75** – Resposta do Teresa à questão de aula do dia 4 de abril relativa à função  $g$

A aluna parece mostrar ter algumas dificuldades em utilizar a notação associada à função inversa. Parece ainda ter descurado a necessidade de a função ser bijetiva para ser invertível, embora tenha tirado essa conclusão na tarefa extra-aula anterior.

## 4.2. Autonomia

### (a) Possibilidade de construção autónoma de conhecimento.

Comece-se por recordar que a aluna, na primeira tarefa extra-aula, apenas resolveu a questão 1 e a 2, embora esta última tenha ficado incompleta. Na tarefa extra-aula 2 não respondeu às questões 1 e 5. Por fim, na última tarefa respondeu a todas as questões, embora não tenha justificado a 7. A aluna parece ter evoluído no envolvimento autónomo das tarefas extra-aula propostas. No entanto, nem sempre respondeu de forma completa e correta.

No QF (Apêndice 2), a Teresa assinalou que compreendeu o enunciado das tarefas. Face às questões que não respondeu e à resposta incorreta que apresentou à questão 2 da primeira tarefa extra-aula, fica a ideia de que esta não tinha conhecimentos suficientes acerca dos conteúdos lá envolvidos e também não procurou informação suficiente para dar uma resposta correta.

A Teresa manteve as respostas nos dois questionários relativamente às afirmações que se encontram no quadro seguinte.

Afirmações	QI	QF
Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes do tópico ser abordado na escola.	Concordo	Concordo
Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.	Discordo	Discordo

**Quadro 18** – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (a)

Tanto no QI (Apêndice 1) como no QF, a aluna assinalou concordo com a afirmação que refere a possibilidade de construir conhecimento de forma autónoma sem que os conteúdos sejam abordados na escola.

O mesmo aconteceu em relação à segunda afirmação – a opinião manteve-se. Assinalou discordar que nunca compreenderia um tópico estudado pela própria, sem que fosse explicado pelo professor.

*(b) Estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia*

As respostas que assinalou, em ambos os questionários, relativamente às afirmações que se relacionam com esta dimensão parecem mostrar alguma incoerência.

Afirmações	QI	QF
Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor esclareça – procuro ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas.	Concordo	Discordo
Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas Web.	Discordo totalmente	Discordo

**Quadro 19** – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (b)

Tendo em conta as respostas da aluna ao QI e QF apresentadas à primeira afirmação do quadro anterior, nota-se alguma regressão. Começou por assinalar concordo para, depois, assinalar discordo em relação à procura de ajuda de colegas, familiares ou outras pessoas quando possui dúvidas.

Já na segunda afirmação, notou-se uma ténue evolução. Deixou de assinalar discordo totalmente para começar a assinalar discordo em relação à procura de ajuda nos serviços ou ferramentas *Web* quando tem dúvidas.

Face estas respostas, fica a ideia de que a aluna não procurava ajuda, ou então fazia-o poucas vezes, quando tem dúvidas. No entanto, as respostas que se relaciona diretamente com as tarefas extra-aula que realizou, não evidenciam o mesmo.

O quadro seguinte sintetiza as opções que a aluna selecionou nas afirmações que se relacionam em específico com as tarefas extra-aula.

Afirmações	QF
Enquanto realizava as tarefas senti necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos.	Concordo totalmente
Enquanto realizava as tarefas procurei informação em outros sítios que não no guião fornecido pelo professor.	Concordo

**Quadro 20** – Respostas da Teresa ao QF em relação à dimensão (b)

A aluna começou por selecionar a opção concordo totalmente em relação à primeira afirmação. Portanto, parece que sentiu necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos. Na segunda afirmação, assinalou concordo, o que significa que, enquanto realizou as tarefas, procurou informação em outros meios que não no guião fornecido pelo professor.

Ora, se anteriormente as suas respostas deram a entender que não costumava procurar ajuda quando tinha dúvidas, em relação às tarefas extra-aula não aconteceu o mesmo. Parece ser clara a necessidade que a aluna teve de procurar ajuda para resolver as tarefas extra-aula. O facto de no QF ter apresentado aquelas respostas dá a ideia de que a aluna só procurou ajuda na resolução das tarefas extra-aula e não faz o mesmo em outros contextos.

#### *(c) Influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática*

As afirmações que apareceram em ambos os questionários e que se relacionam com a influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática encontram-se no quadro seguinte, assim como as respetivas respostas assinaladas pela aluna.

Afirmações	QI	QF
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.	Discordo	Discordo
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia.	Discordo	Concordo

**Quadro 21** – Respostas da Teresa aos QI e QF em relação à dimensão (c)

A Teresa manteve a opinião em ambos os questionários, manifestando discordar que a antecipação do estudo permite acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula. Já em relação à segunda afirmação, a aluna assinalou discordo no QI e, no QF, passou a assinalar concordo. Na procura de uma justificação para esta situação, a autora pensa que se deveu à necessidade que a aluna parece ter tido na procura de ajuda. No entanto, como se viu no início, houve ainda muitas questões que ficaram por fazer.

Especificamente em relação às tarefas extra-aula, a aluna parece ter uma visão positiva acerca do seu contributo nos diversos domínios apresentados, como se pode ver pelas respostas que assinalou e se encontram sintetizadas no quadro seguinte.

Afirmações	QF
A resolução de tarefas contribuiu para a construção de conhecimentos em relação aos conteúdos envolvidos.	Concordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior envolvimento na aula.	Concordo
Ter realizado as tarefas facilitou a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma.	Concordo
Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior interesse na aula.	Concordo

**Quadro 22** – Respostas da Teresa ao QF em relação à dimensão (c)

De forma pouco coerente relativamente ao que referiu anteriormente, a Teresa assinalou concordar que esta estratégia – de resolução de tarefas num momento prévio e extra-aula sem que os conteúdos tenham sido trabalhados em aula – contribuiu para a construção de conhecimento e maior envolvimento e interesse na aula e facilitou a resolução das atividades propostas em aula de forma mais autónoma.

Ora, se anteriormente considerou que a antecipação da matéria não permite acompanhar e compreender melhor a matéria, seria espectável que, neste caso, não tivesse uma opinião positiva em relação ao contributo da realização das tarefas, especialmente no que respeita ao contributo na construção de conhecimentos e ao envolvimento na aula.

O que se verificou durante a aula, em particular nos momentos de correção das tarefas extra-aula, é que a aluna foi participando, embora não tanto quanto se desejasse, e justificando as suas respostas. Foi clara, em algumas das situações, a dificuldade que teve em compreender os conteúdos envolvidos nas tarefas extra-aula. Recorde-se que durante a correção de uma das tarefas ainda se mostrou confusa.

Nas questões de aula, a aluna conseguiu também aplicar conhecimento que se pensa ter sido contruído com a ajuda das tarefas propostas. No entanto, foram ainda muitas as dificuldades evidenciadas pela resolução que apresentou.

## V. Considerações finais

Neste capítulo começa-se por fazer uma breve síntese do trabalho que se apresenta. Apontam-se as principais conclusões, tendo em vista a resposta às perguntas de investigação. Indicam-se ainda algumas limitações do estudo e sugestões para futuras investigações.

### 1. Síntese

A questão de investigação que se assumiu como fio condutor deste trabalho foi:

*Uma exploração prévia e extra-aula, mediada por tecnologias, de tópicos matemáticos, posteriormente abordados em sala de aula, contribui para que os alunos desenvolvam competências matemáticas e transversais?*

Face à questão apresentada foram definidos os seguintes objetivos: analisar a influência da realização prévia e extra-aula, por parte de alunos do 10.º ano de escolaridade, de tarefas relacionadas com o tópico “Generalidades acerca de funções”, que será posteriormente lecionado em aula:

- na construção de conhecimento relativo a esse tópico e sua aplicação na resolução de tarefas variadas e
- no desenvolvimento da autonomia.

De forma a obter resposta à questão de investigação apresentada, optou-se por realizar um estudo de caso múltiplo de natureza qualitativa. Foram considerados como casos quatro alunos. Os dados foram obtidos através de produções escritas dos alunos, respostas a questionários e ainda se procedeu ao registo de notas de campo, mais tarde organizadas num diário de bordo. A análise dos dados foi feita mediante um sistema de categorias que emergiu dos objetivos de investigação: autonomia e construção e aplicação do conhecimento.

## **2. Principais conclusões**

Esta parte destina-se à apresentação das principais conclusões que provêm da análise e discussão dos resultados. Encontra-se bipartida, de acordo com as categorias de análise definidas a partir dos objetivos propostos inicialmente.

### **2.1. Construção e aplicação de conhecimento**

Para se poder retirar conclusões relativamente a esta categoria, procedeu-se à análise das respostas às tarefas extra-aula e às questões-aula. Recorreu-se, ainda, ao Diário de Bordo que a autora construiu com base nas notas de campo recolhidas ao longo das aulas.

Como já se teve oportunidade de verificar anteriormente, são vários os autores que defendem que o professor não deve ser um simples transmissor de informação, mas sim ajudar o aluno a “aprender a aprender”, ou seja, deve proporcionar tarefas e ferramentas que o orientem no processo de aprendizagem (Andrade, 2002; Aquino, 2013; Delors et al., 2012). A resolução das tarefas extra-aula tinha, precisamente, o intuito de servir como um guião orientador da aprendizagem dos tópicos matemáticos nelas envolvidos.

As conclusões que se podem retirar são específicas de cada um dos casos estudados. Por isso, será feita uma breve análise conclusiva de cada um dos casos selecionados.

O Jaime, através da resolução da tarefa extra-aula 1, que envolvia os conceitos de injetividade e sobrejetividade, começou por mostrar algumas dificuldades relativas a esses conceitos. No entanto, na aula, pareceu estar interessado e foi intervindo por forma a corrigir algumas falhas que se identificaram na resolução desta tarefa. Na primeira questão-aula, o aluno revelou ter compreendido os conceitos envolvidos pois classificou, de forma correta, todas as funções apresentadas. Embora algumas das respetivas justificações sejam um tanto incipientes, o aluno mostrou conhecer os conceitos.

Em relação ao tópico função composta, abordado na tarefa extra-aula 2, o aluno revelou algumas dificuldades pois a sua resolução apresentou algumas falhas. Mais uma vez, na aula, o aluno mostrou-se interessado e, oralmente, corrigiu alguns erros que cometeu. No entanto, na segunda questão-aula, persistiram dificuldades inerentes à função composta, especialmente em relação à utilização de notação adequada e à determinação do seu contradomínio.



A última tarefa extra-aula foi resolvida na íntegra pelo Jaime. A sua resolução permitiu constatar que, em relação às condições necessárias para que uma função seja invertível, o aluno apenas não conseguiu identificar a sua designação, tendo conseguido explicar o conceito por palavras suas. O aluno, apesar de não ter participado na aula tanto quanto se desejaria, conseguiu ainda identificar a injetividade. Na questão-aula, revelou um bom desempenho, tendo utilizado uma notação adequada. Começou por justificar, de forma irrepreensível, o facto de a primeira função não admitir inversa. Já no que respeita à segunda função, não apresentou as devidas justificações para a bijetividade, mas calculou a função inversa de forma adequada.

Em suma, foi possível constatar que o Jaime conseguiu construir e aplicar conhecimentos em relação aos tópicos abordados. Este facto foi mais notório no que se refere à injetividade e sobrejetividade de funções e relativamente à função inversa.

A Rita, o segundo caso analisado, na tarefa extra-aula 1, nem sempre conseguiu classificar as funções em relação à injetividade e sobrejetividade de forma correta. Na aula, mostrando-se envolvida, apresentou os exemplos que escreveu na resolução da tarefa e apercebeu-se de alguns erros que cometeu. Já na questão-aula referente, classificou corretamente todas as funções e apresentou sempre justificações, embora algumas tenham sido incipientes.

Apesar de ter resolvido, na íntegra, a segunda tarefa extra-aula, a aluna revelou ter tido algumas dificuldades em relação ao domínio e contradomínio das funções envolvidas. Foi possível verificar que, em relação à função composta, utilizou uma notação adequada. Na aula em que este tópico foi trabalhado, a aluna reiterou, através da sua intervenção, a dificuldade em relação ao domínio da função composta, mostrando alguma confusão. Na questão-aula, a aluna conseguiu determinar a expressão da função composta utilizando a notação adequada, mas continuou a evidenciar as dificuldades já referidas, em determinar corretamente o domínio e contradomínio da função composta.

Na tarefa extra-aula 3, apesar de, inicialmente, a Rita não ter conseguido identificar o nome das condições a impor para que a correspondência inversa seja função, conseguiu explicá-las. Posteriormente, na aula, foi uma aluna participativa e identificou oralmente a sobrejetividade. Na questão-aula, classificou corretamente as duas funções apresentadas e, embora com erros de linguagem, concluiu corretamente em relação à existência de

função inversa. No entanto, inesperadamente, não concluiu a resolução por forma a determinar a expressão da função inversa.

Em suma, verificou-se que a Rita construiu e aplicou conhecimentos em relação aos conteúdos de injetividade e sobrejetividade, função composta e função inversa. A maior dificuldade sentida foi em determinar o domínio e contradomínio da função composta. Não foi possível também verificar se a aluna consegue determinar a expressão da função inversa.

A Leonor, na primeira tarefa extra-aula, apenas respondeu a duas questões. As respostas dadas estavam incorretas. Durante a aula, mostrou estar interessada e envolvida, tendo colocado as suas dúvidas e ultrapassado erros que cometeu na tarefa extra-aula. Na respetiva questão-aula, classificou bem apenas duas das funções apresentadas. Tentou ainda justificar uma das classificações atribuídas, mas com pouco sucesso, já que a notação utilizada se encontrava desajustada e inaceitável para uma aluna que frequenta o Ensino Secundário.

Na tarefa extra-aula 2, a aluna não respondeu a todas as questões e apresentou respostas confusas e com falhas, tal como aconteceu com o Jaime. Na aula mostrou-se, mais uma vez, empenhada e com interesse nas atividades que se realizaram. Teve oportunidade de, no momento de correção da tarefa extra-aula, reformular oralmente a resposta que, anteriormente, apresentou por escrito. Na questão-aula, deu indícios de que percebeu os conceitos envolvidos no tópico em estudo, nomeadamente no que se refere a expressão analítica, domínio e contradomínio de uma função composta.

Tal como aconteceu com os outros casos estudados, também a Leonor resolveu na íntegra a terceira tarefa extra-aula. Na tarefa, não identificou especificamente as condições a impor para que uma correspondência inversa seja função, mas explicou-as de forma clara e perceptível. Na aula, referiu oralmente a sobrejetividade, mas esteve um tanto distante e participou pouco oralmente. Já na questão-aula, a aluna reconheceu a necessidade de uma função ser bijetiva para admitir função inversa. No que se refere à primeira função apresentada, respondeu corretamente e apresentou uma justificação adequada. Em relação à outra função, referiu a sua bijetividade, embora não apresentasse justificação alguma, e calculou corretamente, com notação adequada, a respetiva função inversa.

Em suma, a Leonor construiu e aplicou conhecimentos relacionados com a função composta e a função inversa que, posteriormente, aplicou na resolução de outras tarefas.

No que respeita aos conceitos de injetividade e sobrejetividade de uma função, inicialmente, foram evidenciadas algumas dificuldades. No entanto, na última questão-aula, a aluna conseguiu classificar corretamente as funções representadas.

Por fim, a Teresa, na tarefa extra-aula 1, apresentou respostas que evidenciam confusão entre os conceitos de função injetiva e sobrejetiva. Na aula, a aluna manteve-se confusa, não tendo conseguido reformular a resposta em relação à sobrejetividade da função. Apenas conseguiu, de forma correta, classificar a função quanto à injetividade. Nesta aula, a aluna mostrou-se mais ativa que o normal, pois fez algumas intervenções orais, o que era raro acontecer. Na questão-aula, as classificações que a aluna fez estavam corretas. Ainda tentou justificar uma delas, embora de forma muito sucinta e pouco completa.

A aluna não resolveu totalmente a tarefa extra-aula 2. No entanto, o que fez encontra-se correto. Na aula mostrou-se, mais uma vez, muito interessada e envolvida. Na respetiva questão-aula, a aluna não justificou as respostas que apresentou nem deixa indícios da forma como pensou. Erradamente, apenas apresentou o domínio da função composta.

O desempenho da Teresa na tarefa extra-aula 3 foi muito positivo. Apesar de não ter explicado os motivos pelos quais as correspondências inversas não são funções, referiu corretamente as condições a impor à função inicial para que isso seja possível. Na aula, a aluna deu também evidências de algum cansaço. Apesar de ter constatado a necessidade de a função ser bijetiva para admitir inversa, aquando da resolução da questão-aula, a aluna não verificou se as funções apresentadas eram invertíveis. Embora sem utilizar uma notação adequada, a aluna determinou a inversa da segunda função corretamente.

Em suma, a Teresa foi mostrando alguma confusão através das resoluções das tarefas e das intervenções. A aluna apresentou dificuldades na função inversa e no domínio e contradomínio da função composta. Foi clara ainda a dificuldade que teve na utilização de notação relacionada com a função inversa.

Em relação a estes casos, tal como aconteceu em outros estudos (Aquino, 2013; Araújo, 2014), de uma forma geral, a exploração prévia e antecipada de conteúdos, com recurso a tecnologias, contribuiu para a construção e aplicação de conhecimentos e respetiva aplicação em outras tarefas.

Como se pode constatar, foram várias as vezes que os alunos analisados tiveram dificuldades em utilizar a notação e a linguagem apropriada das funções. Esta dificuldade está retratada na literatura – Saraiva et al. (2010) afirmam que, devido à relação entre os diversos símbolos, os alunos revelam ter muitas dificuldades na utilização da notação associada às funções.

## **2.2. Desenvolvimento de autonomia**

A análise do desenvolvimento da autonomia foi dividida em três dimensões: (a) possibilidade de construção autónoma de conhecimento, (b) estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia e (c) influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática.

### *(a) Possibilidade de construção autónoma de conhecimento*

A possibilidade de construção autónoma de conhecimento foi analisada com base na resolução das tarefas extra-aula e nas respostas que os alunos assinalaram, em ambos os questionários, nas afirmações que dizem respeito a esta dimensão.

As conclusões que se podem retirar são específicas e individuais de cada um dos casos estudados. No entanto, há que salientar que, no início, todos os alunos se mostraram resistentes e com pouco interesse em realizar a tarefa extra-aula. Recorde-se que a primeira tarefa extra-aula – “A emissão de CO<sub>2</sub>” (Apêndice 3) – não foi resolvida na totalidade por nenhum dos alunos. Esta atitude era já esperada tendo em conta a literatura explicitada no capítulo II desta investigação. Tucker (2012) menciona que é normal existir resistência por parte dos alunos já que é um método diferente do que estão habituados. O mesmo autor defende que, ao longo do tempo, os alunos começam-se a adaptar e mostram melhores atitudes. Pensa-se que foi o que aconteceu com os nossos casos já que, todos resolveram, na íntegra, a última tarefa extra-aula. Esta atitude parece evidenciar que evoluíram no envolvimento autónomo na resolução das tarefas extra-aula.

O Jaime assume uma posição muito particular relativamente a este assunto. Considerou que compreenderia frequentemente um tópico matemático estudado por si mas que não existem muitos conteúdos que permitam tal.

A Rita deixou de ter uma opinião positiva acerca da possibilidade de construção de conhecimento de forma autónoma para passar a considerar que existe pouco

conhecimento matemático possível de ser construído autonomamente e que, raramente compreenderia um tópico estudado por si.

Por outro lado, a Leonor e a Teresa mostraram ter uma opinião favorável acerca da antecipação da matéria. Consideraram que existe conhecimento matemático passível de ser construído autonomamente pelo aluno e que compreenderiam os tópicos estudados por si.

De facto, como se viu, os alunos aprenderam sempre alguma coisa acerca dos conteúdos abordados nas tarefas extra-aula. Evidenciaram, por vezes, algumas dificuldades, mas houve sempre construção de conhecimento em relação a algum dos aspetos dos tópicos estudados.

*(b) Estratégias usadas para o desenvolvimento da autonomia*

Para analisar as estratégias que os alunos usaram no desenvolvimento da autonomia, procedeu-se à análise das respostas às afirmações dos questionários relativas a esta dimensão. Nas tarefas extra-aula, procuraram-se também indícios de possíveis estratégias.

O Jaime não pareceu utilizar estratégias que lhe permitiram esclarecer dúvidas, sem que seja o professor a fazê-lo na aula. Nos questionários, através das suas respostas, deu a entender que nunca (ou raramente) procurou ajuda de pessoas ou nas ferramentas *Web*.

Como se teve oportunidade de verificar, o Jaime e a Leonor apresentaram respostas iguais numa das tarefas, o que parece indiciar que trabalharam juntos. Esta atitude revela uma das características que Trevellin, Pereira e Neto (2013) mencionam deste tipo de abordagem – o trabalho em grupo ou colaborativo.

A Rita não procurou ajuda em serviços e ferramentas *Web* quando sentiu dúvidas. No início do estudo referiu o mesmo em relação à procura de ajuda de outras pessoas. No entanto, talvez pela necessidade que confirmou ter tido em procurar esclarecimentos para resolver as tarefas extra-aula, passou a assinalar uma resposta que indica que procura ajuda de pessoas para esclarecer as suas dúvidas, não esperando que seja o professor a fazê-lo.

A Leonor pareceu possuir, desde o início deste estudo, estratégias que lhe permitem esclarecer dúvidas, não esperando pela aula para o fazer. Admitiu procurar ajuda tanto de

outras pessoas como na *Internet*. Na última tarefa extra-aula, sugeriu videogramas onde se podem encontrar esclarecimentos acerca dos tópicos abordados.

A Teresa mostra-se um pouco incoerente nas respostas dadas a ambos os questionários. No entanto, a ideia que fica é que apenas procurou ajuda para a resolução de tarefas extra-aula. Em relação a outros trabalhos, não pareceu utilizar este tipo de estratégias.

A Leonor pareceu ser o único caso estudado que já possuía competências de autonomia que lhe permitiam utilizar estratégias para colmatar as dificuldades com que se deparou. Os outros casos pareceram ter sentido a necessidade de procurar ajuda na resolução das tarefas extra-aula, mas não o fizeram (ou fizeram raramente) em relação a outras situações.

Como se pode ver, apenas um caso, de entre os analisados, assumiu procurar ajuda em serviços ou ferramentas *Web*. Isto vem corroborar o que Barbosa *et al.* (2015) defendem quando referem que os alunos, apesar de viver neste contexto das tecnologias, não as usam a favor da própria aprendizagem.

#### *(c) Influência do trabalho autónomo na aprendizagem da matemática*

Para poder retirar conclusões em relação à influência do trabalho autónomo na aprendizagem, recorreu-se à resolução das tarefas extra-aula, ao desempenho dos alunos durante a correção das tarefas extra-aula e ainda às respostas assinaladas nas afirmações que estão ligadas com esta dimensão, em ambos os questionários.

Relativamente ao trabalho que os alunos realizaram num momento prévio e extra-aula, todos os casos estudados concordaram que contribuiu para a construção de conhecimento acerca dos conteúdos abordados e também para um maior envolvimento na aula. De facto, a professora verificou que alguns alunos, como a Teresa, intervieram mais que o normal nestas aulas.

O Jaime e a Rita não consideraram que a resolução das tarefas extra-aula tenha contribuído para a resolução autónoma de outras atividades nas aulas. Já a Leonor e a Rita manifestaram opinião contrária.

Com exceção do Jaime, todos os outros casos consideraram que a resolução das tarefas extra-aula contribuiu para um maior interesse na aula. Como o Jaime parecia já ser, antes do estudo, um aluno muito interessado na aula, esta opinião pode indicar que o interesse se manteve igual.

Relativamente à antecipação da matéria, a Leonor pareceu ter noção dos seus benefícios no acompanhamento e compreensão da matéria e ainda no desenvolvimento da autonomia. A aluna manifestou esta ideia tanto antes como depois do estudo. Já em relação aos outros casos, não se verificou o mesmo.

O Jaime e a Teresa não consideraram que a antecipação da matéria beneficiou o acompanhamento e compreensão da matéria. Em relação a isto, inicialmente a Rita concordou e, após o estudo, passou a discordar.

Já em relação ao desenvolvimento da autonomia, a Rita manteve a opinião e considerou que a antecipação do estudo contribuiu bastante. Já o Jaime, que inicialmente assinalou concordar, de forma estranha, passou a achar pouco possível isso acontecer. A Teresa assumiu uma posição contrária à do Jaime, começando por discordar e acabando por considerar bastante possível.

De uma forma global, acredita-se que o trabalho autónomo teve influência na construção e aplicação de conhecimento, embora seja mais visível nuns casos que noutros. Quanto às outras componentes analisadas, as opiniões são variadas. No entanto, verificou-se que estes alunos se mostraram interessados, envolvidos e participativos nas aulas deste estudo.

### **3. Constrangimentos do estudo**

O primeiro constrangimento que surge é o facto de a investigadora não ser a professora titular da turma. Sendo professora estagiária, apenas interveio pontualmente, o que não propicia uma relação tão próxima dos alunos e um seu mais aprofundado conhecimento.

O facto de os alunos não estarem habituados a este tipo de aulas é também considerado um constrangimento. Talvez tivesse sido vantajoso, num momento anterior do estudo, ter preparado e implementado aulas do mesmo tipo podendo, desta forma, ter evitado a resistência inicial em realizar as tarefas extra-aula.

Uma última limitação identificada prende-se com a dificuldade acrescida que a autora encontrou em efetuar uma análise qualitativa. Com uma formação de base em matemática, nem sempre foi fácil transmitir, de forma adequada o que pretendia.

#### **4. Sugestões para futuras investigações**

Não há dúvidas quanto à importância de desenvolver competências de autonomia, desde logo por forma a que sejam os próprios alunos a procurar informação com o intuito de construir o próprio conhecimento. Por este motivo, pensa-se ser importante estudar o impacto de uma abordagem em sala de aula que fuja do método tradicional, utilizando como estratégia a antecipação da matéria em outros temas matemáticos que não sejam as funções. Julga-se ainda pertinente avaliar este impacto em outras disciplinas e até mesmo em níveis de ensino diferentes.



## Referências Bibliográficas

- Ackermann, E. (2001). Piaget's Constructivism , Papert's Constructionism : What's the difference ? *Future of Learning Group Publication*, 5(January 2001), 1–11. <http://doi.org/10.1.1.132.4253>
- Agostinho, C. M. C. A. (2012). *Práticas de integração das tecnologias no ensino da Matemática. O caso dos professores do Ensino Secundário do Seixal*. Universidade de Lisboa. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10451/7695>
- Almeida, C. S. (2006). *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área*. Brasil.
- Andrade, P. F. De. (2002). Aprender por projectos, formar educadores. In *Formação de educadores para o uso da informática na escola*. (pp. 57–83). Retrieved from <http://www.nied.unicamp.br/oea/pub/livro4/index.html>
- Aquino, S. I. V. M. P. (2013). *O projeto PmatE e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior*. Universidade de Aveiro.
- Araújo, I. M. (2014). *Aprendizagem matemática no ensino superior: a influência da plataforma M@t-Educar com Sucesso*. Universidade de Aveiro. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10773/12826>
- Azevedo, A., & Ponte, J. P. (2006). *Raciocínio Matemático na Aprendizagem das Funções: Um estudo de Caso*.
- Azevedo, J., Babo, M., Lopes, A., & Torres, C. (2008). *O Projeto Matactiva no ISCAP*. Porto. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10400.22/587>
- Barbosa, M. F., Barcelos, G. T., & Batista, S. C. F. (2015). Sala de aula invertida: Caraterização e Reflexões. In *Congresso Integrado da Tecnologia de Informação*. Paque Dom Bosco. <http://doi.org/10.1074/jbc.R115.652289>
- Barbosa, S. M. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia*. Universidade Estadual Paulista.
- Barbosa-Lima, M. C., Castro, G. F. De, & Araújo, R. M. X. (2006). Educar, formar, educar e instruir: a linguagem da crise escolar. *Ciência E Educação*, 12(2), 235–245.
- Bergmann, J., Overmyer, J., & Wilie, B. (2013). The Flipped Class: Myths vs. Reality.

Retrieved from <http://bit.ly/19tQVlh>

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education.

Bessa, V. da H. (2008). *Teorias da Aprendizagem*. Brasil: IESDE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Botelho, L., & Rezende, W. (2011). Um breve histórico do conceito de função. *Caderno Dá-Licença*.

Cabrita, I. (1991). A problemática do Insucesso Educativo em Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico. *Cadernos de Análise Sócio-Organizacional Da Educação* 4. Retrieved from <http://ria.ua.pt/handle/10773/10577>

Cavalcante, N. I. dos S. (2010). O ensino de matemática no contexto das novas tecnologias: refletindo as potencialidades do uso de softwares dinâmicos como recurso em sala de aula. In *V Connepi*. Campus de Picuí.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina, S.A.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221–243. <http://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000106>

Cristóvão, D., & Vieira, C. (2011). Contributos para um diagnóstico do insucesso escolar no ensino superior: a experiência da universidade de Évora. In A. Noutel (Ed.), *O Papel das Universidades para uma Europa do Conhecimento* (pp. 37–56). Lisboa: Universidade Lusíada Editora. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10174/4630>

Delors, J., Isao, A. M., Chung, F., Gorham, W., Suhr, W., & Nanzhao, Z. (2012). *Educação: Um Tesouro a Descobrir* (7ª edição). Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI., Editora Cortez. <http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>

Domingos, A. M. D. (1994). *A Aprendizagem de Funções num Ambiente Computacional com recurso a diferentes representações*. Universidade Nova de Lisboa.

- Fernández, E., Bernardo, A., Suárez, N., Cerezo, R., Núñez, J. C., & Rosário, P. (2013). Predicción del uso de estrategias de autorregulación en educación superior. *Anales de Psicología*, 29(3), 865–875. <http://doi.org/10.6018/analesps.29.3.139341>
- Herreid, C., & Schiller, N. (2013). Case studies and the flipped classroom. *Journal of College Science Teaching*, 42(5), 62–66. Retrieved from <https://aacu-secure.nisgroup.com/pkal/regionalnetworks/documents/CRWG-SPEE-REF-01.pdf>
- Leandro, R. N. (2006). *Insucesso escolar na matemática: um (outro) olhar: percepção dos alunos do 6.º ano do Ensino Básico sobre o insucesso*. Universidade do Minho. Retrieved from <http://hdl.handle.net/1822/6758>
- Leinhardt, G., Stein, M. K., & Zaslavsky, O. (1990). Functions, graphs , and Graphing : Tasks , Learning , and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.
- Maganarius, R., Buligon, L., & Martins, M. M. (2015). Uma proposta para a introdução do ensino de Funções através da utilização do programa Tracker. *Revista Do Centro de Ciências Naturais E Exatas - UFSM*, 37, 481–498. <http://doi.org/10.5902/2179460X14847>
- ME. (2001). *Programa de Matemática A - 11.º ano*. Retrieved from [http://www.dgidec.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica\\_a\\_10.pdf](http://www.dgidec.min-edu.pt/data/ensinosecundario/Programas/matematica_a_10.pdf)
- ME. (2013a). *Programa e Metas Curriculares. Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- ME. (2013b). *Programa e Metas Curriculares - Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Monteiro, A., Dominique, F., Rodrigues, E., Monteiro, I., Rebelo, I., da Silva, M., & Ferreira, R. (2014). *Processo de Avaliação Externa de Aprendizagem - Provas Finais de Ciclo e Exames Nacionais 2014*.
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Nóvoa, A. (2009). *Professores: imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa. Retrieved from <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Professores+Imagens+do+futuro+presente#0>

- Pais, S., Cabrita, I., & Anjo, A. (2014). A plataforma PmatE e o desenvolvimento de apetências em Matemática. *Tecnologias Da Informação Em Educação*, (6(1)), 219–241.
- Palha, S. (2006). *Educar para a autonomia*. Oosterlicht College.
- Pelicano, A. A. (2014). O estudo das funções no 7.º ano : conceito e representações.
- Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? *Revista Ibero-Americana de Educação*. Retrieved from <http://www.rieoei.org/rie24a03.htm>
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105–162.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51–74. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10451/2983>
- Ponte, J. P. da. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação E Matemática*, (15), 3–9. Retrieved from <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473>
- Ponte, J. P. da, & Quaresma, M. (2012). O Papel do Contexto nas Tarefas Matemáticas. *Interacções*, 22(22), 196–216.
- Postal, R. F., Haetinger, C., Madalena, M., & Schossler, D. C. (2011, May). Atividades de modelagem matemática visando-se a uma aprendizagem significativa de funções afins , fazendo uso do computador como ferramenta de ensino. *Revista de Educação Em Ci~encia E Tecnologia*, 153–172.
- Pouts-Lajus, S., & Riché-Magniet, M. (1998). *A escola na era da internet*. Paris: Éditions Nathan.
- Pozo, J. I. (1996). No es oro todo lo que reluce ni se construye (igual) todo lo que se aprende: contra el reduccionismo constructivista. *Anuario de Psicología*, 69(69), 127–139. Retrieved from <http://revistes.ub.edu/index.php/Anuario-psicologia/article/view/9091/11598>
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. Van. (2005). *Manual de Investigacao em Ciências Sociais* (4.ª). Lisboa: Grandiva.
- Ricoy, M. C., & Couto, M. J. O. V. S. (2011). As tic no ensino secundario na matematica em Portugal: A perspectiva dos professores. *Revista Latinoamericana de*

*Investigacion En Matematica Educativa*, 14(1), 95–119.

- Rosário, P. J. S. L. D. F. (2001). Diferenças processuais na aprendizagem: avaliação alternativa das estratégias de auto-regulação da aprendizagem. *Psicologia Educação E Cultura*, V(1), 87–102. Retrieved from <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/11896>
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229–254.
- Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function, 1, 229–254.
- Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). Estudo das funções no programa de matemática A com problemas e tarefas de exploração. Lisboa: Projeto IMLNA - Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra.
- Semião, Ma. J., & Canavarro, A. P. (2012). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das funções. In M. Olga & A. Folque (Eds.), *Práticas de Investigação em Educação*. Évora.
- Silva, A. (2015). Contributo das tecnologias digitais para o desenvolvimento de competências do século XXI em uma aula invertida. *@rquivo Brasileiro de Educação*, 3(6), 65–86.
- Silva, M., & Rezende, W. M. (1999). Análise Histórica do Conceito de Função. *Caderno de Licenciatura Em Matemática*, 2.
- Silva, A. L. da, Simão, A. M. V., & Sá, I. (2004). A Auto-regulação da Aprendizagem : Estudos Teóricos e Empíricos. *Intermeio: Revista Do Mestrado Em Educação*, 10(19), 58–74. Retrieved from <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:A+Auto-regulacao+da+Aprendizagem++Estudos+Teoricos+e+Empiricos#0>
- Sosa, G. W., Berger, D. E., Saw, A. T., & Mary, J. C. (2011). Effectiveness of Computer-Assisted Instruction in Statistics: A Meta-Analysis. *Review of Educational Research*, 81(1), 97–128. <http://doi.org/10.3102/0034654310378174>
- Stake, R. E. (2012). *A arte da investigação com estudos de caso* (3.ª edição). Lisboa: Fundação Caloust Gulbenkian.

- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Brochura de Matemática - Funções - 10.º ano de escolaridade*. Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.
- Trevellin, A., Pereira, M., & Neto, J. (2013). A utilização da “sala de aula invertida” em cursos superiores de tecnologia: comparação entre o modelo tradicional e o modelo invertido “Flipped Classroom” adaptado aos estilos de aprendizagem. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, 11(12), 137–150. Retrieved from <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4563587&orden=1&info=link>  
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/extart?codigo=4563587>
- Tucker, B. (2012). The Flipped Classroom: Online instruction at home frees class time for learning. *Education Next*, 12(1), 82–83.
- Valente, J. A. (2014). A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. *UNIFESO - Humanas E Sociais*, 1(1), 141–166.
- Vargas, D. E. C., & Silva, G. A. (2011). Um estudo de caso sobre aprendizagem de funções com o software winplot e planilha eletrônica em um curso técnico em informática. *Revista Da Educação Matemática Da UFOP*, 1.
- Viveiros, J., & Lopes, A. (2008). O (in)sucesso escolar a matemática na transição para o 10.º ano - um estudo de caso. *Currículo, Aprendizagens E Trabalho Docente*, pp. 2247–2263. Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade do Porto.
- Yin, R. K. (2001). *Estudo De Caso: Planejamento E Métodos* (2.ª). Porto Alegre: Bookman. Retrieved from [http://books.google.com.br/books/about/Estudo\\_de\\_caso.html?id=bQXKAAAACAAJ&pgis=1](http://books.google.com.br/books/about/Estudo_de_caso.html?id=bQXKAAAACAAJ&pgis=1)

## Apêndices





## **Apêndice 1 – Questionário Inicial**



# Questionário

Com o presente questionário, pretende-se obter informação acerca do uso que fazes das tecnologias e ainda da tua atitude face à matemática. Desde já agradeço a tua colaboração e asseguro a confidencialidade da informação disponibilizada assim como o anonimato.

Espero que sejas o mais sincero(a) possível.

Assinala com um X a opção que melhor traduz a tua situação

\*Obrigatório

Como te chamas? \*

A sua resposta

## I. Caraterização dos participantes

1. Sexo \*

- ☐ Feminino
- ☐ Masculino

2. Idade \*

A sua resposta

3. Em relação às três disciplinas de que mais gostas, a matemática está incluída? \*

- ☐ Sim
- ☐ Não

4. Na tabela seguinte, encontram-se algumas afirmações. Para cada uma delas, coloca um X na opção que achares mais adequada. \*

DT- Discordo Totalmente | D - Discordo | C - Concordo | CT - Concordo Totalmente

	DT	D	C	CT
Gosto de matemática.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A matemática é difícil.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Gosto de resolver tarefas matemáticas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Gosto de desafios/jogos matemáticos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
A matemática não é importante para a minha formação.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Tenho apetência para a matemática.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Não sou bom aluno a matemática	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

## II. Utilização de equipamentos tecnológicos

1. De que dispositivos dispões com acesso à internet? (Assinala com uma X as respostas que mais se adequam ao teu caso. Podes assinalar mais do que uma resposta)

- ☐ Telemóvel
- ☐ Computador Fixo (Desktop)
- ☐ Computador Portátil (Laptop)
- ☐ Tablet
- ☐ Consola de jogos
- ☐ Outro

2. Conheces e utilizas serviços e ferramentas Web? Se sim, com que frequência? Para cada um dos serviços e ferramentas, coloca um X na opção que achares mais adequada. \*

NC - Não conheço | NU - Não Uso | R - Raramente | D - Diariamente | VVD - Várias vezes por dia

NC      NU      R      D      VVD

Redes Sociais (ex: Facebook, Google, Hi5)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Blogues e micro-blogues (ex: Blogger, Twitter, Tumblr)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Serviços para o armazenamento e partilha de ficheiros (ex: Dropbox, Picassa, YouTube)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Serviços de suporte ao trabalho colaborativo (ex: GoogleDocs, Microsoft Live Office)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Ferramentas de comunicação assíncrona (ex: e-Mail, Fóruns de discussão)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Ferramentas de comunicação síncrona (ex: MSN Messenger, Skype)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Plataformas de e-Learning (ex: Moodle, Blackboard)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3. Quando acedes à Internet, para que usas os serviços e ferramentas Web? Para cada uma das possibilidades, coloca um X na opção que achares mais adequada. \*

	Questões/assuntos de âmbito escolar	Questões/assuntos de âmbito pessoal	Para ambas (os)
Jogar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Comunicar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Esclarecer dúvidas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Pesquisar recursos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Partilhar recursos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Enviar documentos ou ficheiros	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Desenvolver trabalhos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

### III. Autonomia

1. Na tabela seguinte, encontram-se algumas afirmações. Para cada uma delas, coloca um X na opção que achares mais adequada. \*

DT - Discordo Totalmente | D - Discordo | C - Concordo | CT - Concordo Totalmente

	DT	D	C	CT
Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes de ser abordado na escola.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor o esclareça - procuro a ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas Web.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

## **Apêndice 2 – Questionário Final**





## QUESTIONÁRIO DE AUTO APRECIÇÃO

O presente questionário visa obter informação sobre o modo como realizaste as tarefas e ainda a tua opinião acerca das mesmas.

Lembra-te de ser o mais sincero(a) possível.

Obrigada pela colaboração.

### I. Tarefas realizadas como trabalho de casa

As afirmações seguintes referem-se às tarefas que realizaste como trabalho de casa nas últimas três aulas.

Coloca um X na opção que achares mais adequada.

**DT** – Discordo Totalmente | **D** – Discordo | **C** – Concordo | **CT** – Concordo Totalmente

	<b>DT</b>	<b>D</b>	<b>C</b>	<b>CT</b>
1. Compreendi o enunciado das tarefas.				
2. Enquanto realizava as tarefas senti necessidade de procurar ajuda e/ou esclarecimentos.				
3. Enquanto realizava as tarefas procurei informação em outros sítios que não no guião fornecido pelo professor.				
4. A resolução das tarefas contribuiu para a construção de conhecimento em relação aos conteúdos lá envolvidos.				
5. A resolução das tarefas contribuiu para o meu maior envolvimento na aula.				
6. Ter realizado as tarefas facilitou a resolução das atividades na aula de forma mais autónoma.				
7. Ter realizado as tarefas contribuiu para o meu maior interesse na aula.				

## II. Autonomia

Na tabela seguinte, encontram-se algumas afirmações. Para cada uma delas, coloca um X na opção que achares mais adequada.

**DT** – Discordo Totalmente | **D** – Discordo | **C** – Concordo | **CT** – Concordo Totalmente

	<b>DT</b>	<b>D</b>	<b>C</b>	<b>CT</b>
1. Há muito conhecimento matemático que pode ser construído autonomamente pelos alunos antes de ser abordado na escola				
2. Nunca compreenderia um tópico matemático a estudar por mim antes do(a) professor(a) o explicar.				
3. Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me acompanhar e compreender melhor a matéria abordada na aula.				
4. Quando tenho dúvidas em relação a algum conteúdo matemático, não espero que o professor o esclareça - procuro a ajuda de colegas, familiares ou de outras pessoas.				
5. Quando tenho dúvidas em relação a conteúdos matemáticos procuro ajuda nos serviços e ferramentas <i>Web</i> .				
6. Antecipar o estudo de um tópico matemático permite-me desenvolver a autonomia.				

### **Apêndice 3 – Tarefa extra-aula 1: “A emissão de CO<sub>2</sub>”**



## A emissão de CO<sub>2</sub>

Nome: \_\_\_\_\_ N.º \_\_\_\_\_

A emissão de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) é um flagelo mundial que muito tem preocupado as mais diversas instituições. Para que tenhas ideia da gravidade da situação podes analisar, em tempo real, a emissão de CO<sub>2</sub> de cada país aqui: [www.breathingearth.net/](http://www.breathingearth.net/)

1. Completa a tabela que se segue com alguns dos países mais e menos poluidores e regista a quantidade de CO<sub>2</sub> que emitiram no momento da consulta. Encontras esta informação no canto inferior esquerdo do mapa onde diz *“since you started watching”*.

País	Emissão de CO <sub>2</sub> (toneladas)

A correspondência estabelecida na tabela anterior é uma restrição da função que a cada país associa a respetiva quantidade de CO<sub>2</sub> emitida no momento da consulta.

2. Sabendo que uma função é:

- **injetiva** quando objetos diferentes têm imagens também diferentes e
- **sobrejetiva** se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada,

a função definida na tabela será injetiva? E será sobrejetiva? Justifica.

--

3. Caso tenhas considerado a função anterior injetiva, consegues acrescentar alguns dados de modo a que esta seja não injetiva?

--

4. Dá outros exemplos da vida real de situações que traduzam:

a) Funções injetivas e sobrejetivas



b) Funções não injetivas e não sobrejetivas



c) Funções injetivas e não sobrejetivas



d) Funções não injetivas e sobrejetivas



- Tarefa adaptada de **Cabrita, I.** (Coord. e autora), Pinheiro, L., Pinheiro, J., & Sousa, O. (2008). *Novas trajetórias em matemática*. Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro.





## **Apêndice 4 – Tarefa extra-aula 2: “A matemática pensa em tudo”**



**A matemática pensa em tudo**

Nome: \_\_\_\_\_ N.º \_\_\_\_\_

No *site* <http://bit.ly/1QK4WEC> vais encontrar a informação de que necessitas para poder responder às perguntas que se seguem.

1. De acordo com o que leste no *site*, a que corresponde  $T(C(dormir))$ ?

Supõe agora que uma certa editora paga o trabalho de processamento de texto a 1,50€ por página e que o colaborador demora, em média, 9 minutos a processar uma página.

Considera as funções:

- $P$ , que representa o número de páginas em função do tempo  $t$  (*min*) gasto com o seu processamento e
- $C$ , que exprime o custo (em €) do trabalho realizado em função do número de páginas processadas ( $p$ ).

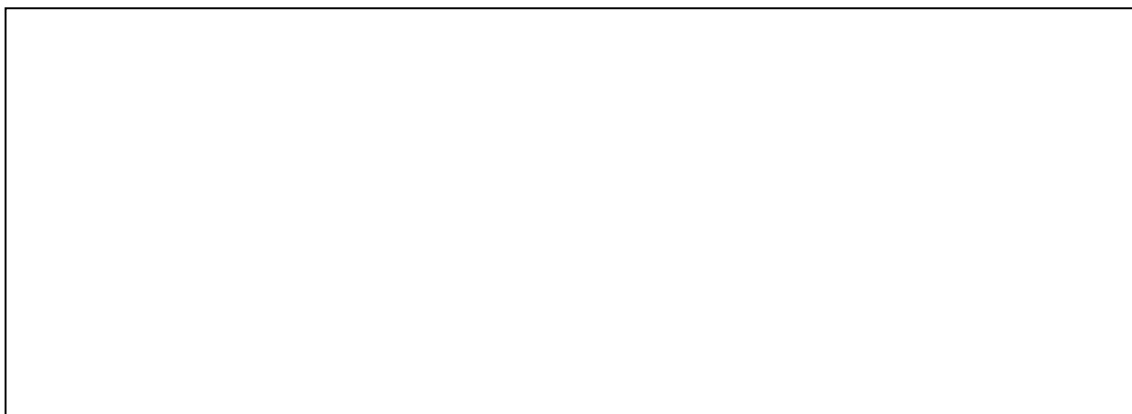
2. Carateriza as funções  $P$  e  $C$ .

**Nota:** Para caraterizar uma função, deves indicar a sua expressão algébrica, o domínio e o conjunto de chegada.

3. Qual o custo de seis horas de trabalho?

4. De acordo com o contexto do problema, o que representa a expressão  $(C \circ P)(t) = C(P(t))$ ?

5. Carateriza  $C \circ P$ .



Podes obter mais informação sobre este assunto em [www.youtube.com/watch?v=gUcyrXj\\_19s](http://www.youtube.com/watch?v=gUcyrXj_19s) (em particular a partir do minuto 3).

Se encontrares outro vídeo sobre este assunto que consideres mais interessante, indica o respetivo *site*.





## **Apêndice 5 – Tarefa extra-aula 3: “Os mesmos dados, duas funções”**





**Os mesmos dados, duas funções.**

Nome: \_\_\_\_\_ N.º \_\_\_\_\_

O Instituto Português do Mar e da Atmosfera (IPMA) é a organização pública que, designadamente, disponibiliza informação aos utilizadores nos domínios do mar e da atmosfera. Entre outras informações, podes consultar as temperaturas previstas para cada distrito de Portugal no *site*: <https://www.ipma.pt/pt/index.html>

1. Com a informação que encontras no *site*, completa a tabela que se segue com as temperaturas máximas previstas, para o período da consulta, correspondentes a cada um dos distritos mencionados.

Distrito	Temperatura Máxima (°C)
Aveiro	
Braga	
Coimbra	
Évora	
Leiria	
Lisboa	
Porto	
Santarém	
Viseu	
Beja	
Funchal	

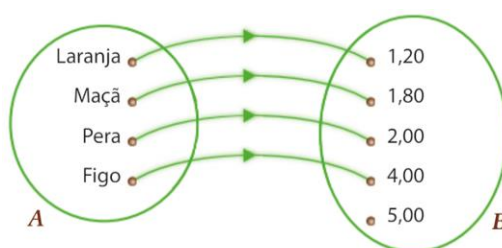
A correspondência estabelecida na tabela anterior é uma função que a cada distrito faz corresponder a temperatura máxima prevista, para o período da consulta.

2. Estabelece agora a correspondência inversa.


3. A correspondência anterior é uma função? Justifica.

4. Que condição se tem de impor à função inicial para que a sua correspondência inversa seja função?

5. Considera agora a função  $f: A \rightarrow B$ , que a cada fruta do conjunto  $A$  faz corresponder o seu preço por kg.



*Inspirado em Matemática em Ação 7 (2016)*

6. Estabelece a correspondência inversa.

7. A correspondência anterior é uma função? Justifica.

8. Que condição se tem de impor à função inicial para que a sua correspondência inversa seja função?

Podes obter mais informação sobre funções inversas em <https://www.youtube.com/watch?v=LQjfnE3Lswg>.

Se encontrares outro vídeo ou *site* sobre este assunto que consideres mais interessante indica o respetivo *link*.

## **Apêndice 6 – Plano de aula do dia 15 de março de 2016**



## PLANO DE AULA

**Disciplina:** Matemática A

**Duração:**  $2 \times 90$  min

**Ano letivo:** 2015/2016

**Tema:** Generalidades sobre funções

**Ano/Turma:** 10º A

**Tópico:** Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

**Datas previstas:** 15 de março de 2016

### Objetivos do domínio...

#### ...dos conhecimentos:

- **1.5.** Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f: A \rightarrow B$  como “injetiva” se para todos os  $x_1, x_2$  pertencentes a  $A$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  (ou, de modo equivalente  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ) e designar também uma tal função por “injeção de  $A$  em  $B$ ”
- **1.6.** Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f: A \rightarrow B$  como “sobrejetiva” se para todo o  $y$  pertencente a  $B$ , existir um elemento  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $y = f(x)$  e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por “sobrejeção de  $A$  em  $B$ ” ou por “função de  $A$  sobre  $B$ ”.
- **1.7.** Identificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f: A \rightarrow B$  como “bijetiva” se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por “bijeção de  $A$  sobre  $B$ ”.

#### *Metas curriculares – FRVR10*

- Reconhecer funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas nas suas diversas representações;

#### ... das capacidades:

- Interpretar e criticar resultados;
- Comunicar raciocínios e ideias por escrito de forma clara e organizada;
- Desenvolver o raciocínio matemático;

#### ... das atitudes:

- Desenvolver autonomia e desembaraço na utilização de conhecimentos e capacidades matemáticas;

- Expressar e fundamentar as suas opiniões;
- Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa e criatividade;
- Procurar a informação de que necessita;
- Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa;
- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova;
- Respeitar a opinião dos colegas;

### Pré-requisitos:

- Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma **função**  $f$  (ou **aplicação**) de  $A$  em  $B$  é uma correspondência que a cada elemento  $x$  de  $A$  associa um elemento único de  $B$  que se designa por imagem de  $x$  e se representa por  $f(x)$ .

A função  $f$  designa-se por  $f: A \rightarrow B$ .

- Considere-se uma função  $f: A \rightarrow B$ 
  - Ao conjunto  $A$  chama-se **domínio** da função  $f$ .  
O domínio de  $f$  representa-se por  $D_f$ .
  - Ao conjunto  $B$  chama-se **conjunto de chegada** da função  $f$ .
  - Ao conjunto das imagens chama-se **contradomínio** da função  $f$ .  
O contradomínio da função  $f$  representa-se por  $D'_f, CD_f$  ou  $f(A)$ .
- O **gráfico de uma função**  $f: A \rightarrow B$  é o conjunto de pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x \in A$  e  $y = f(x) \in B$ . Representa-se por  $G_f = \{(x, y): x \in D_f \text{ e } y = f(x)\}$ .
- Fixado um referencial cartesiano num plano, o **gráfico cartesiano** de uma dada função numérica  $f$ , de variável numérica, é o conjunto constituído pelos pontos do plano cuja ordenada é a imagem por  $f$  da abcissa. O gráfico cartesiano de  $f$  designa-se apenas por gráfico de  $f$  quando esta identificação não for ambígua.
- **Formas de representar uma função**  
Uma função pode ser representada por uma expressão algébrica, um diagrama de setas, um gráfico cartesiano, um gráfico ou uma tabela.



- Uma **função só fica bem definida** se se conhecer o domínio, o conjunto de chegada e a correspondência entre os elementos do domínio e os elementos do conjunto de chegada.

#### **Recursos:**

- Computador;
- Projetor;
- Manual do aluno;
- Quadro e canetas.

#### **Estrutura geral da aula:**

1. Entrada e acomodação;
2. Escrita do sumário;
3. Recolha das tarefas e discussão das mesmas;
4. Classificação de funções representadas em diversas formas quanto à sua injetividade, sobrejetividade e bijetividade;
5. Síntese da aula;
6. Resolução da tarefa para entregar.

#### **Metodologia:**

Na aula anterior, os alunos levaram uma tarefa (“*A emissão de CO<sub>2</sub>*”) para resolver em casa. Até ao momento de resolução desta tarefa os alunos ainda não tiveram contato com os conceitos de função injetiva e/ou sobrejetiva. Esta tarefa tem como intuito a exploração desses conceitos num momento prévio e extra aula através da resolução de tarefas com um contexto próximo da realidade que nos circunda.

No início da aula, a discussão centrar-se-á nas diversas possibilidades de resolução dessa ficha. Caso ninguém tenha realizado a tarefa será disponibilizado tempo para a sua realização individual e posterior entrega (cerca de 20 minutos).

Posto isto, serão projetadas algumas tarefas cujo objetivo é classificá-las quanto à injetividade, sobrejetividade e bijetividade. De seguida, será feita uma síntese sobre os

conceitos referidos (injetividade, sobrejetividade e bijetividade) e os alunos a resolverão uma tarefa para posterior recolha.

Ao longo da aula, as tarefas e as definições serão projetadas após serem construídas com a ajuda dos alunos. Desta forma, as representações serão mais fiáveis e poder-se-á fazer uma melhor gestão do tempo.

## **DESENVOLVIMENTO DA AULA:**

**Momento I (5 minutos):** Entrada e acomodação dos alunos na sala de aula

**Momento II (5 minutos):** Escrita do sumário e recolha das tarefas realizadas extra aula

*Classificação de funções quanto à sua injetividade, sobrejetividade e bijetividade.*

**Momento III (20 minutos):** Discussão da tarefa através da resolução que os alunos fizeram das tarefas antecipatórias.

Considerando a possibilidade de os alunos não terem resolvido a tarefa, os alunos terão oportunidade de o fazer neste momento. Assim sendo, no momento que se segue será feita a discussão da mesma e a resolução de apenas algumas tarefas (1, 4, 5 e 6).

Com o intuito de perceber o impacto que a tarefa teve nos alunos, pretende-se que o professor coloque algumas questões aos alunos:

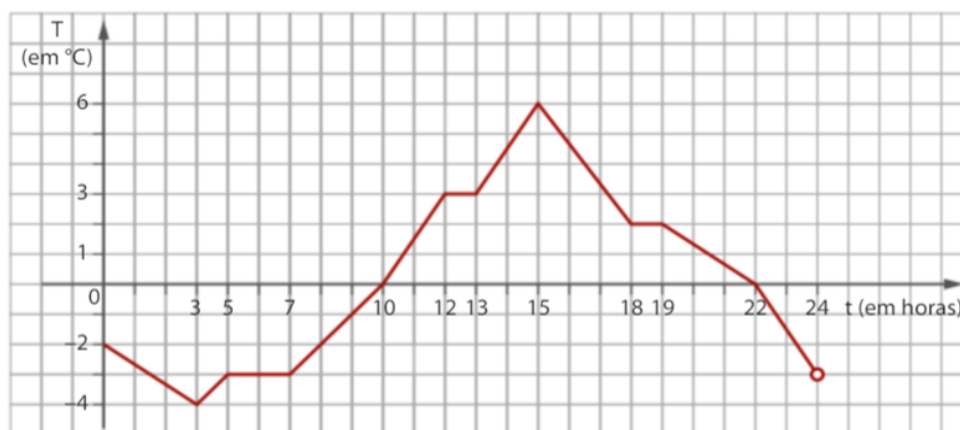
- Gostaram de realizar a tarefa?
- Perceberam os conceitos envolvidos?
- Principais dificuldades?
- Realizaram a tarefa apenas com as indicações fornecidas ou precisaram de procurar informação em outros locais? Quais?

Neste momento, o professor já tem as tarefas realizadas pelos alunos em sua posse e, assim, pode trazer ao discurso com a restante turma as respostas ou exemplos referidos por eles.

**Momento IV (35 minutos):** Classificação de funções representadas em diversas formas.

Como já foi referido as tarefas serão projetadas e posteriormente será disponibilizado o enunciado das mesmas na *moodle* da escola.

1. Observa a representação gráfica da função  $T$ , que nos dá a variação da temperatura numa determinada localidade ao longo de um dia inteiro:



A função  $T$  é injetiva? E quanto a sobrejetividade, o que podes concluir?

Justifica as tuas respostas.

**Proposta resolução:** Ao longo do dia, houve vários momentos em que se registou a mesma temperatura. Por exemplo, às 0 horas e às 8 horas a temperatura foi de  $-2^{\circ}\text{C}$ . Podemos dizer que, nesta função, há horas (objetos) diferentes a que corresponde a mesma temperatura (imagem). Por isso, a função diz-se não injetiva.

Quanto à sobrejetividade, nada podemos concluir pois não conhecemos o conjunto de chegada. Apenas sabemos qual é o contradomínio.

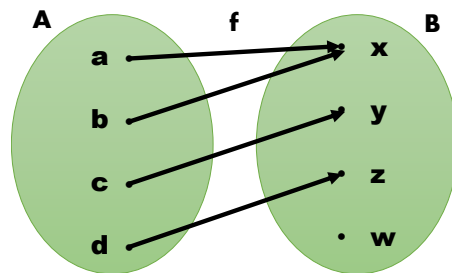
2. Considera a função que representa o número de páginas impressas em função do tempo (minutos). A função que a seguir se apresenta é uma restrição da anterior. É uma função injetiva? E sobrejetiva? Justifica.

Tempo (min)	18	27	45	90	180	360	450
N.º de páginas	2	3	5	10	20	40	50

**Proposta de resolução:** A função é injetiva – a objetos (tempo) diferentes correspondem imagens (n.º de páginas) diferentes.

O conjunto de chegada desta função é um número inteiro maior que zero, ou seja,  $\mathbb{N}$ . A função representada na tabela não é sobrejetiva porque o contradomínio não coincide com o conjunto de chegada:  $D'_h = \{1, 3, 5, 10, 20, 40, 50\} \neq \mathbb{N}$ .

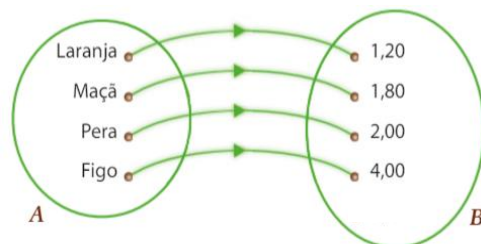
3. A função  $f: A \rightarrow B$  é injetiva? E sobrejetiva? Justifica.



**Proposta resolução:** A função  $f$  é não injetiva, pois  $f(a) = f(b) = x$  e também não é sobrejetiva, pois o contradomínio e o conjunto de chegada não coincidem.

4. Seja  $f: A \rightarrow B$  a função que a cada tipo de fruta faz corresponder o seu preço por quilograma.

A função que a seguir se apresenta é injetiva? E sobrejetiva? Justifica.

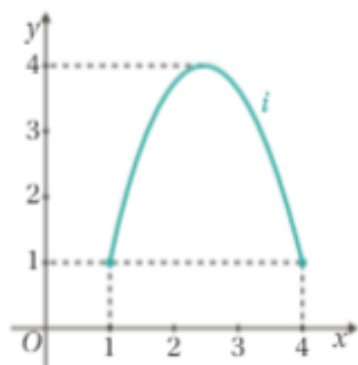


**Proposta resolução:** A função  $f$  é injetiva pois para tipos de fruta (objetos) diferentes faz corresponder preços por kg (imagens) também diferentes. A função é também sobrejetiva uma vez que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

- ❖ O professor deve aproveitar este momento para explicar que *quando uma função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva diz-se que é bijetiva.*

A função anterior, por ser injetiva e sobrejetiva diz-se bijetiva.

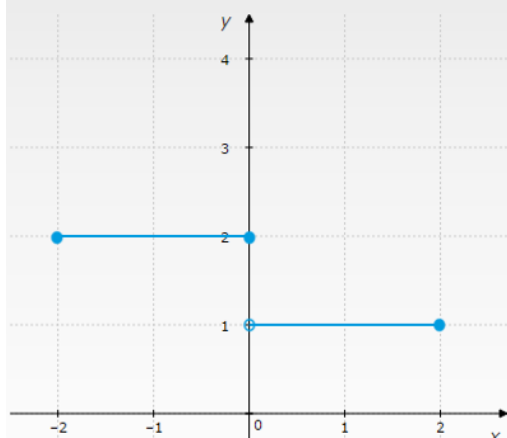
5. A função  $i: [1,4] \rightarrow [1,4]$  é injetiva? E sobrejetiva? Justifica.



**Proposta de resolução:** A função  $i$  é não injetiva - por exemplo,  $i(1) = h(4) = 1$ . A função  $h$  é sobrejetiva pois o contradomínio coincide com o conjunto de chegada:  $D'_h = [1, 4]$ .

6.

Na imagem está representada a função  $f: A \rightarrow B$ .  
Qual deve ser o conjunto  $B$  para que  $f$  seja sobrejetiva?



☐  $B = \{1, 2\}$

☐  $B = ]1, 2]$

☐  $B = \mathbb{R}^+$

☐  $B = [1, 2]$

**Proposta de resolução:** Para que a função seja sobrejetiva, o domínio e o contradomínio da função têm de coincidir. Através de uma análise do gráfico cartesiano, podemos constatar que o  $D'_f = \{1, 2\}$ . Portanto, o conjunto de  $B$ , que corresponde ao conjunto de chegada, terá de ser  $\{1, 2\}$ .

7. A função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = x^2$  é injetiva? É sobrejetiva? É bijetiva? Justifica.

- ❖ Pretende-se escrever a definição apresentada aos alunos na tarefa “*A emissão de CO<sub>2</sub>*” de forma simbólica com a ajuda dos alunos. A definição lá presente é “uma função é injetiva quando objetos diferentes têm imagens diferentes”. De forma simbólica têm-se: “para quaisquer  $x_1, x_2$  pertencentes a  $\mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ ”
- Pode-se escrever isto de um modo diferente, trazendo o que os alunos aprenderam na lógica. Anteriormente escreveu-se algo do género:  $A \Rightarrow B$ . Ou seja, impõe-se uma condição aos objetos para chegar a uma condição das respetivas imagens. E se se pretender fazer o contrário? Ou seja, se se quiser iniciar com uma condição sobre as imagens?
- Através das operações sobre proposições que aprenderam na lógica, os alunos devem ser capazes de referir que a implicação  $A \Rightarrow B$  é equivalente a  $\sim B \Rightarrow \sim A$ . Esta última designa-se por contrarrecíproca. Portanto, dizer que, para quaisquer  $x_1, x_2$  pertencentes a  $\mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$  é o mesmo que dizer  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Voltando à tarefa 6, pretende-se provar, por definição, que a função  $g$  não é injetiva. Para isso, considere-se dois objetos  $a$  e  $b$  pertencentes ao domínio. Através da implicação contrarrecíproca veja-se o que acontece quando as imagens desses objetos são iguais ou seja:

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\Leftrightarrow a^2 = b^2 \\ &\Leftrightarrow a = b \vee a = -b \end{aligned}$$

Portanto, pode-se concluir que, dados dois objetos simétricos, as respetivas imagens são iguais. Vejamos um exemplo:  $g(2) = g(-2) = 4$ . Por este motivo, a função não é injetiva.

Como a função  $g(x) = x^2$ , todas as imagens são não negativas. Portanto, todos os números negativos pertencem ao conjunto chegada e não pertencem ao contradomínio. Logo, uma vez que o conjunto de chegada, ou seja  $\mathbb{R}$ , não é igual ao contradomínio, a função  $g$  não é sobrejetiva.

A função também não é bijetiva já que não é injetiva e sobrejetiva.

**Momento V (15 minutos):** Síntese dos conceitos envolvidos na aula.

Com este momento, pretende-se formalizar os conceitos envolvidos na aula.

#### **Definição**

Uma função  $f: A \rightarrow B$  diz-se **injetiva** (ou injeção de  $A$  em  $B$ ) se para todos os  $x_1, x_2$  pertencentes a  $A$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  (objetos diferentes têm imagem diferentes).

De modo equivalente, pode-se dizer  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  (se as imagens são iguais então os objetos são iguais)

#### **Definição**

Uma função  $f: A \rightarrow B$  diz-se **sobrejetiva** (ou sobrejeção de  $A$  em  $B$ ) se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Ou seja, se para todo o  $y$  pertencente a  $B$ , existir um elemento  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $y = f(x)$

#### **Definição**

Uma função  $f: A \rightarrow B$  diz-se **bijetiva** (ou bijeção de  $A$  sobre  $B$ ) se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

**Momento VI (10 minutos):** Resolução, para entrega, de uma tarefa:

Considera as funções

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(x) = |x|$
- $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $g(x) = |x|$
- $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $h(x) = |x|$

Classifica as funções anteriores quanto à sua injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Justifica.

**Momento VII:** Entrega da tarefa que os alunos terão de realizar para a próxima aula.



## **Apêndice 7 – Plano de aula do dia 17 de março de 2016**



## PLANO DE AULA

**Disciplina:** Matemática A

**Datas previstas:** 17 de março

**Ano letivo:** 2015/2016

**Duração:**  $2 \times 90$  min

**Ano/Turma:** 10º A

**Tema:** Generalidades sobre funções

### Objetivos do domínio...

#### ...dos conhecimentos:

- **1.8.** Identificar, dadas funções  $f: D_f \rightarrow A$  e  $g: D_g \rightarrow B$ , a «função composta de  $g$  com  $f$ » como a função  $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$ , tal que  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$  e  $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g(f(x))$  e designá-la também por « $g$  composta  $f$ », « $g$  após  $f$ » ou « $f$  seguida  $g$ »;

*Metas curriculares – FRVR10*

- Reconhecer que a composição de funções não é uma operação comutativa;

#### ... das capacidades:

- Interpretar e criticar resultados;
- Comunicar raciocínios e ideias por escrito de forma clara e organizada;
- Desenvolver o raciocínio matemático;

#### ... das atitudes:

- Desenvolver autonomia e desembaraço na utilização de conhecimentos e capacidades matemáticas;
- Expressar e fundamentar as suas opiniões;
- Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa e criatividade;
- Procurar a informação de que necessita;
- Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa;
- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova;
- Respeitar a opinião dos colegas;

**Recursos:**

- Computador;
- Projetor;
- Manual do aluno;
- Quadro e canetas.

**Estrutura da aula:**

1. Entrada e acomodação;
2. Escrita do sumário;
3. Conclusão da aula anterior;
4. Discussão e correção da tarefa “*A matemática pensa em tudo*”
5. Realização de uma tarefa e construção da definição
6. Resolução da tarefa para entregar

**Metodologia:**

Antes de começar a aula com o assunto da função composta, é preciso retomar assuntos que ficaram pendentes na aula anterior – análise e escrita das definições de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas e ainda correção da tarefa que os alunos realizaram no final da aula anterior.

De forma análoga ao que se fez na aula anterior, os alunos levaram para casa uma tarefa (“*A matemática pensa em tudo*”) cuja realização pretende-se que seja feita num momento anterior ao da presente aula com o objetivo de explorar o conceito de função composta. No início da aula, a discussão centrar-se-á na correção da tarefa. Caso ninguém a tenha realizado, mais uma vez, será disponibilizado tempo para que o façam individualmente.

Posto isto, será analisada a função composta com recurso a tabelas para que os alunos percebam a questão do domínio e se construa assim a definição de função composta.

De seguida, será resolvida a tarefa para entregar.

Ao longo da aula, as tarefas e as definições serão projetadas para que sejam mais realistas e fiáveis.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA:

**Momento I (5 min):** Entrada e acomodação dos alunos na sala de aula

**Momento II (5 min):** Escrita do sumário e recolha das tarefas realizadas extra aula

*Composição de funções.*

**Momento III (20 min):** Conclusão da aula anterior e correção da tarefa realizada no final.

Na aula passada viu-se que a função  $g(x) = x^2$  não é injetiva porque existem objetos diferentes com a mesma imagem. Para provar isto bastou mostrar um contraexemplo:  $g(3) = g(-3) = 9$ .

No fundo, o que verificamos é que a condição  $\forall x_1, x_2 \in D_g \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$  é falsa. Portanto, quando a função não é injetiva verifica-se a condição:

$$\begin{aligned} & \sim [\forall x_1, x_2 \in D_g \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)] \\ & \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in D_g : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2). \end{aligned}$$

Portanto, recuando ao que os alunos aprenderam em lógica:

$$\sim(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \sim(\sim a \vee b) \Leftrightarrow a \wedge \sim b$$

**Nota:** Para provar que uma função é injetiva tem de ser por definição. Para provar que não é injetiva basta mostrar um contraexemplo.

De seguida os alunos terão oportunidade de passar as definições.

Considera as funções

- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(x) = |x|$ ;
- $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $g(x) = |x|$ ;
- $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $h(x) = |x|$

Classifica as funções anteriores quanto à sua injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Justifica as tuas respostas.

---

A função  $f$ :

- não é injetiva pois  $f(1) = f(-1) = 1$ .
- não é sobrejetiva – as imagens vão ser sempre maiores ou iguais a zero, o que faz com que o contradomínio seja  $\mathbb{Z}_0^+$ , não coincidindo com conjunto de chegada que é  $\mathbb{Z}$ .
- não é bijetiva.

A função  $g$ :

- é injetiva - seja  $a, b \in \mathbb{N}$ , por definição:  $g(a) = g(b) \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow a = b$  (não esquecer que  $a, b \in \mathbb{N}$ ).
- é sobrejetiva – o conjunto das imagens da função por  $\mathbb{N}$  são sempre os próprios números.
- é bijetiva

A função  $h$ :

- é injetiva – a prova é semelhante à da função  $f$ .
- não é sobrejetiva -  $D'_h = \mathbb{N}$ , não coincidindo assim com o conjunto de chegada.
- não é bijetiva.

**Momento IV (20 min):** Discussão da e correção da tarefa antecipatórias ( “*A matemática pensa em tudo*”).

Considerando a possibilidade de os alunos não terem resolvido a tarefa, os alunos terão oportunidade de o fazer neste momento.

Com o intuito de perceber o impacto que a tarefa teve nos alunos, pretende-se que o professor coloque algumas questões aos alunos:

- Gostaram de realizar a tarefa?
- Perceberam os conceitos envolvidos?
- Principais dificuldades?
- Realizaram a tarefa apenas com as indicações fornecidas ou precisaram de procurar informação em outros locais? Quais?

**Momento V (25 min):** Resolução de uma tarefa com o objetivo de construir a definição de função composta, nomeadamente no que respeita ao domínio desta função.

Para poder definir a função composta falta apenas saber qual será o domínio desta função. A tarefa que se segue tem como objetivo exatamente esse: descobrir como se define o domínio de uma função composta.

**Definição:** Seja  $f: D_f \rightarrow A$  e  $g: D_g \rightarrow B$ .

**Função composta de  $g$  com  $f$**  é a função  $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$ , tal que:

- $D_{g \circ f} = ??$  e
- $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g[f(x)]$ .

A função composta de  $g$  com  $f$  também pode ser designada « $g$  composta com  $f$ », « $g$  após  $f$ » ou « $f$  seguida  $g$ ».

**1.** Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 4, 5\}$  e  $B = \{2, 4, 5, 8\}$ , considera as funções  $f$  e  $g$  tais que:

$$f: A \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x \text{ e } g: B \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = x - 1$$

**a)** Completa as tabelas seguintes:

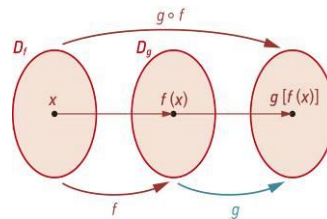
$x$	1	2	4	5
$f(x)$	2	4	8	10

$x$	2	4	5	8
$g(x)$	1	3	4	7

**b)** Constrói a tabela relativa à função  $(g \circ f)(x)$ .

Antes de começar a calcular a função  $g \circ f$ , pretende-se questionar os alunos acerca do domínio e contradomínio desta função para que depois seja comparado com o resultado final. Isto com intenção de que eles se apercebam que o domínio da função composta não depende exclusivamente dos valores de  $x \in D_f$ .

Para calcular  $(g \circ f)(x)$  tem-se que primeiramente determinar  $f(x)$  para depois se determinar  $g(f(x))$ , tal como está indicado no esquema seguinte:



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 3$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(8) = 7$$

$(g \circ f)(5) = g(f(5))$   $f(5) = 10$  e  $10 \notin D_g$  logo não é possível determinar  $g(10)$  e, por isso,  $(g \circ f)(5)$  não está definido

$x$	1	2	4
$g \circ f(x)$	1	3	7

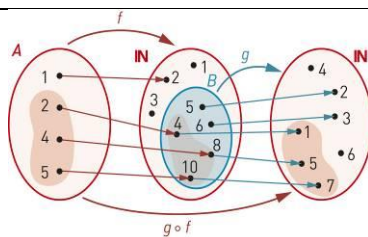
**b)** Qual é o domínio e o contradomínio da função  $(g \circ f)(x)$ .

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in A : f(x) \in B\} = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4\}$$

$$D'_{g \circ f} = \{(g \circ f)(x) : x \in D_{g \circ f}\} = \{1, 3, 7\}$$

Este esquema ajuda a ilustrar o que foi feito na determinação do domínio:





c) Determina  $(g \circ f)(2)$  e  $(f \circ g)(2)$ . O que podes concluir quanto à comutatividade da composição de funções?

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 3$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2$$

A composição de funções não é uma operação comutativa.

Posto isto, os alunos escreverão a definição de função:

#### Definição:

Seja  $f: D_f \rightarrow A$  e  $g: D_g \rightarrow B$ .

**Função composta de  $g$  com  $f$**  é a função  $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow B$ , tal que:

- $D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$  e
- $\forall x \in D_{g \circ f}, g \circ f(x) = g[f(x)]$ .

A função composta de  $g$  com  $f$  também pode ser designada « $g$  composta com  $f$ », « $g$  após  $f$ » ou « $f$  seguida  $g$ ».

**Momento VI (15 min):** Resolução de uma tarefa de forma individual para entregar ao professor.

- Um tubo de tinta foi derramado sobre um tecido branco. Admitindo que a mancha provocada no tecido é circular e o raio da mesma aumenta 2 cm por minuto, pode-se definir as seguintes funções:

- $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \mathbb{N}$ , que a cada instante  $t$  (em minutos), faz corresponder o raio  $r$  (em cm) da mancha circular e
- $g: \{2,3,4,6,10\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , que a cada valor do raio faz corresponder a área do círculo formado pela mancha.

**2.1.** Completa as tabelas seguintes;

$t$	1	2	3	4	5
$f(t)$	2	4	6	8	10

$r$	2	3	4	6	10
$g(r)$	$4\pi$	$9\pi$	$16\pi$	$36\pi$	$100\pi$

**2.2.** Calcula a área da mancha ao fim de 5 min.

$$f(5) = 10$$

$$g(10) = 100\pi$$

A área da mancha ao fim de 5 minutos é de  $100\pi \text{ cm}^2$ .

**2.3.** Exprime a área da mancha em função de  $t$ .

$$A(t) = g(f(t)) = g(2t) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$$

**2.4.** Caracteriza a função  $g \circ f$ .

$$D_{g \circ f} = \{t \in D_f: f(t) \in D_g\} = \{t \in \{1,2,3,4,5\}: f(t) \in \{2,3,4,6,10\}\} = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5\} = \{1,2,3,5\}$$

$$g \circ f: \{1,2,3,5\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$t \mapsto 4\pi t^2$$

## **Apêndice 8 – Plano de aula do dia 4 de abril de 2016**



## PLANO DE AULA

**Disciplina:** Matemática A

**Datas previstas:** 4 de abril

**Ano letivo:** 2015/2016

**Duração:** 90 min

**Ano/Turma:** 10º A

**Tema:** Generalidades sobre funções

### Objetivos do domínio...

#### ...dos conhecimentos:

- “Designar, dado um conjunto  $A$ , por «função identidade em  $A$ » a função  $Id_A: A \rightarrow A$  tal que,  $\forall x \in A, Id_A(x) = x$  e justificar que se trata de uma função bijetiva”;
- “Justificar, dados conjuntos  $A$  e  $B$  e uma função  $f: A \rightarrow B$  bijetiva, que para todo  $y$  pertencente a  $B$  existe um e apenas um elemento  $x$  pertencente a  $A$  tal que  $f(x) = y$  e, representando-o por  $x_y$ , designar por «função inversa de  $f$ » a função  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tal que,  $\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$ ”;
- “Reconhecer, dada uma função  $f: A \rightarrow B$  bijetiva, que  $f^{-1}$  é bijetiva e que  $(f^{-1})^{-1} = f$  e designar também  $f^{-1}$  por «bijeção recíproca de  $f$ »”.

*Metas curriculares – FRVR10*

#### ... das capacidades:

- Interpretar e criticar resultados;
- Comunicar raciocínios e ideias por escrito de forma clara e organizada;
- Desenvolver o raciocínio matemático;

#### ... das atitudes:

- Desenvolver autonomia e desembaraço na utilização de conhecimentos e capacidades matemáticas;
- Expressar e fundamentar as suas opiniões;
- Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa e criatividade;
- Procurar a informação de que necessita;
- Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa;
- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova;
- Respeitar a opinião dos colegas;

**Estrutura da aula:**

1. Entrada e acomodação;
2. Escrita do sumário;
3. Discussão e correção da tarefa “*Os mesmos dados duas funções*”;
4. Correção da tarefa para entrega da aula anterior,
5. Resolução de tarefas
6. Escrita das definições
7. Resolução da tarefa para entrega
8. Resposta a questionário

**Metodologia:**

De forma análoga ao que se fez na aula anterior, os alunos levaram para casa uma tarefa ( “*Os mesmos dados duas funções*”) com o objetivo de explorarem previamente o conceito de função inversa. No início da aula, a discussão centrar-se-á na correção dessa tarefa. Caso ninguém a tenha realizado, será disponibilizado tempo para que os alunos o façam de forma individual. Será ainda feita a correção da tarefa que os alunos realizaram na aula anterior e que entregaram ao professor.

De seguida, serão resolvidas e corrigidas tarefas relativas a função inversa e identidade. Posto isto, será dado tempo aos alunos para poderem registar as definições que serão construídas com base no que se fez nessas tarefas.

No final da aula, será ainda pedido aos alunos para resolverem uma tarefa e ainda para responderem a um questionário, que serão entregues ao professor.

Durante a aula, os enunciados das tarefas e as definições serão projetadas.

**Recursos:**

- Computador;
- Projetor;
- Manual do aluno;
- Quadro e canetas.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA:

**Momento I (5 min):** Entrada e acomodação dos alunos na sala de aula

**Momento II (5 min):** Escrita do sumário e recolha da resolução das tarefas realizada extra aula

*Função inversa.*

**Momento III (10 min):** Correção da tarefa realizada no final da aula anterior.

**3.** Um tubo de tinta foi derramado sobre um tecido branco. Admitindo que a mancha provocada no tecido é circular e o raio da mesma aumenta  $2\text{ cm}$  por minuto, pode-se definir as seguintes funções:

- $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \mathbb{N}$ , que a cada instante  $t$  (em minutos), faz corresponder o raio  $r$  (em cm) da mancha circular e
- $g: \{2,3,4,6,10\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , que a cada valor do raio faz corresponder a área do círculo formado pela mancha.

**1.1** Completa as tabelas seguintes;

$t$	1	2	3	4	5
$f(t)$	2	4	6	8	10

$r$	2	3	4	6	10
$g(r)$	$4\pi$	$9\pi$	$16\pi$	$36\pi$	$100\pi$

**1.2** Calcula a área da mancha ao fim de 5 min.

$$f(5) = 10$$

$$g(10) = 100\pi$$

A área da mancha ao fim de 5 minutos é de  $100\pi\text{ cm}^2$ .

**1.3** Exprime a área da mancha em função de  $t$ .

$$A(t) = g(f(t)) = g(2t) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$$

**1.4** Carateriza a função  $gof$ .

$$D_{gof} = \{t \in D_f : f(t) \in D_g\} = \{t \in \{1,2,3,4,5\} : f(t) \in \{2,3,4,6,10\}\}$$

$$= \{1,2,3,5\}$$

$$gof: \{1,2,3,5\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$t \mapsto 4\pi t^2$$

**Momento IV (15 min):** Discussão e correção da tarefa “*Os mesmos dados duas funções*”.

Considerando a possibilidade de os alunos não terem resolvido a tarefa, terão oportunidade de o fazer neste momento. Neste caso, os alunos que já tiverem a tarefa resolvida, são convidados a resolver tarefas do manual.

Com o intuito de perceber a influência que a tarefa teve nos alunos, colocam-se algumas questões oralmente cujas respostas serão registadas pelas minhas colegas de estágio:

- Gostaram de realizar a tarefa?
- Perceberam bem os conceitos envolvidos?
- Quais as principais dificuldades que sentiram na sua resolução?
- Realizaram a tarefa apenas com as indicações fornecidas ou precisaram de procurar informação em outros locais ou junto de outras pessoas? Quais e/ou quem?

**Momento V (15 min):** Resolução de tarefas

Neste momento, os alunos já se terão apercebido de que uma função só admite inversa quando é bijetiva (injetiva e sobrejetiva). Pretende-se, agora, que os alunos analisem o que acontece relativamente ao domínio, contradomínio e da expressão algébrica da função inversa.

Os alunos terão algum tempo para pensar e tentar resolver as tarefas.

Com o objetivo descrito anteriormente, resolver-se-á a tarefa seguinte.



1. Seja  $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  a função que ao comprimento do lado de um quadrado faz corresponder o seu perímetro. Fixada uma unidade de medida, sendo  $x$  o comprimento do lado de um quadrado, o seu perímetro fica definido por  $p(x) = 4x$

a) É possível determinar a função inversa de  $p$ ?

*A função  $p$  é bijetiva, pois entre o lado de um quadrado e o seu perímetro há uma correspondência que designamos biunívoca por se tratar de uma correspondência de um para um – a cada lado corresponde um único perímetro e vice-versa.*

b) Dado o contexto do problema, a que corresponde a função inversa?

*A função inversa de  $p$  fará corresponder ao perímetro de um quadrado o comprimento do seu lado.*

*(Será dito aos alunos que esta função – inversa – é representada por  $f^{-1}$ .)*

c) Caracteriza a função inversa.

$$D_{p^{-1}} = D'_p = \mathbb{R}^+$$

$$D'_{p^{-1}} = D_p = \mathbb{R}^+$$

$$p(x) = y \Leftrightarrow 4x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{4}$$

$$p^{-1}(y) = \frac{y}{4}$$

*Usou-se  $y$  para designar o perímetro do quadrado, mas pode-se utilizar outra letra como por exemplo  $x$ . Neste caso, passaríamos a ter  $p^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ .*

*Adaptado de Novo Ípsilon (2016)*

A tarefa seguinte visa determinar a inversa de uma função e ainda verificar que a composição de uma função com a sua inversa (ou o contrário) é a função identidade.

2. Considera a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 5x + 2$ .

2.1. Justifica que  $f$  é bijetiva e apresente uma expressão para  $f^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

*Por definição, a função  $f$  é injetiva:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 5x_1 + 2 = 5x_2 + 2 \Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

*A função  $f$  é sobrejetiva porque o  $D'_f = \mathbb{R}$  e coincide com o conjunto de chegada.*

*Portanto, a função  $f$  é bijetiva.*

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 5x + 2 \Leftrightarrow y - 2 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{5}$$

*A função inversa é  $y = \frac{x-2}{5}$ , isto é  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$ .*

2.2. Mostra que para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e  $f^{-1}of(x) = x$  e  $f of^{-1}(x) = x$ .

$$f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x + 2) = \frac{5x+2-2}{5} = \frac{5x}{5} = x$$

$$f of^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

**Momento VI (5 min):** Registo das definições de função inversa e identidade.

Com a ajuda dos alunos e a análise do que se fez nas tarefas anteriores, pretende-se formular e registar as respetivas definições.

**Definição:**

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$  bijetiva, a **função inversa de  $f$**  é a função  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tal que  $\forall y \in B$ ,  $f^{-1}(y) = x$ , onde  $x \in A$  é o único elemento tal que  $f(x) = y$ .

**Definição:**

Dado um conjunto  $A$ , dá-se o nome de **função identidade em  $A$**  e representa-se por  $Id_A$  à função de  $A$  em  $A$ , tal que  $\forall x \in A$ ,  $Id_A(x) = x$ .

**Momento VII (10 min):** Resolução de uma tarefa de forma individual para entregar ao professor.

Considera as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x - 5$ .

Define, se possível, as funções inversas de  $f$  e  $g$ . Justifica.

**Momento VIII (5 min):** Resposta ao questionário final.



## **Apêndice 9 – Autorização aos Encarregados de Educação**



## Autorização

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado de Educação,

Eu, Ana Valente, estou neste momento a frequentar o 2.º ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário na Universidade de Aveiro, pelo que me encontro na situação de professora estagiária na turma do seu educando.

Para a conclusão do Mestrado, devo realizar um Relatório Final de Estágio que implicará a recolha de dados empíricos. Esses dados serão provenientes de registos de avaliação e, eventualmente, de respostas escritas do seu educando às tarefas propostas em ambiente de sala de aula, bem como de um questionário a implementar. O preenchimento é anónimo.

Face ao exposto, solicito a sua autorização para a participação do seu educando neste estudo.

Com os melhores cumprimentos,

\_\_\_\_\_  
(Ana Valente)



Eu, \_\_\_\_\_,  
Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)  
\_\_\_\_\_, n.º \_\_\_\_, autorizo a recolha de dados  
empíricos nas aulas de Matemática necessários para a realização do relatório final das  
professoras estagiárias, no âmbito do mestrado em ensino de Matemática no 3.º CEB e  
no Secundário.

\_\_\_\_/\_\_\_\_/2016

\_\_\_\_\_  
(Encarregado(a) de Educação)